

1. Az alábbi  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorhalmazok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Tekintsük  $\mathbb{R}^4$  azon  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$  elemeit, melyekre

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0; & \text{b) } x_1x_2 = x_3x_4; & \text{c) } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0; \\ \text{d) } x_1 \geq x_2; & \text{e) } x_1 + 4x_4 = 2; & \text{f) } x_4^3 = 0. \end{array}$$

$\mathbb{R}^4$ -ben a fenti hat részhalmaz közül melyek alkotnak alteret?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\mathbb{R}^n$  egy nem-üres  $U$  részhalmazára  $\{\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \implies \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U\}$ , akkor  $U$  altér.

4. Legyen  $V$  egy altér az  $\mathbb{R}^n$  vektortérben,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  pedig  $\mathbb{R}^n$ -beli vektorok, amelyekről azt tudjuk, hogy  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  és  $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$   $V$ -ben van, ám  $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$  nem eleme  $V$ -nek. Az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok közül melyik van  $V$ -ben?

5. Döntsük el, hogy a mondott vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, összefüggők-e, illetve lehetnek ilyenek és olyanok is:

- (legalább kételemű) lineárisan független vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
- lineárisan független vektorrendszerhez hozzáveszünk egy vektort;
- (legalább kételemű) lineárisan összefüggő vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
- lineárisan összefüggő vektorrendszerhez hozzáveszünk egy vektort;
- (legalább kételemű) bázisból elhagyunk egy vektort;
- bázishoz hozzáveszünk egy vektort;
- a (legalább kételemű) vektorrendszer egyik vektora egy másiknak négyszerese;
- a (legalább háromelemű) vektorrendszer egyik vektora két másiknak összege;
- a vektorrendszer egyik vektora a nullvektor.

6.  $n \geq 3$  és  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  esetén melyik igaz az alábbi állítások közül?

- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \text{ L}.$
- $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L}.$
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \text{ Ö}.$
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \text{ L}.$
- $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}, 4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}, 7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 9\mathbf{c} \text{ Ö} \implies \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ Ö}.$
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a} \text{ Ö}.$
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L} \implies \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a} \text{ L}.$

7. Legyen  $n \geq k > 1$  és  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  lineárisan független vektorrendszer  $\mathbb{R}^n$ -ben. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

- $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k;$
- $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1;$     c)  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k;$
- d\*)  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1;$     e)  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k.$

8\*. Legyen  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  lineárisan független vektorrendszer  $\mathbb{R}^n$ -ben. Mely  $\mathbf{b}$  vektorokra lesz az  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_k + \mathbf{b}$  vektorrendszer lineárisan összefüggő?