

Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ esetén melyik definíció szolgáltat skaláris szorzatot?

- a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$;
- b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$;
- c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_2 + x_2y_1$;
- d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

A 2–5. feladatban \mathbb{R}^n -en az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ skaláris szorzat szerepel:

2. Számítsa ki az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok hajlásszögét \mathbb{R}^4 -ben:

- a) $\mathbf{a} = [1, 2, 2, 3]^\top$, $\mathbf{b} = [3, 1, 5, 1]^\top$;
- b) $\mathbf{a} = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0]^\top$.

3. Keressen olyan 1 normájú vektort, amely merőleges a $[2, 1, 1, 3]^\top$, $[1, 1, 1, 1]^\top$ és $[1, -1, -1, 1]^\top$ vektorok mindegyikére!

4. Az alábbi szimmetrikus mátrixokhoz megadandó (\mathbb{R}^2 -ben ill. \mathbb{R}^3 -ben) SONB, és meghatározandó a mátrixokhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Alkalmazzuk a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást a $\mathbf{b}_1 = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_2 = [0, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_3 = [0, 0, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$ vektorokra!

6. Vegyük \mathbb{C}^3 -ben az $\mathbf{a} = [1 - i, 1, i]^\top$, $\mathbf{b} = [1 - i, i, 2]^\top$ vektorokat. Számítsuk ki a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b}^* \mathbf{a}$ skalárszorzatot és az \mathbf{a} vektor normáját! Határozzuk meg a $\mathbf{c} = [3, y, z]^\top$ vektor ismeretlen komponenseit úgy, hogy merőleges legyen az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokra!

7. Legyenek \mathbf{x} és \mathbf{y} egy komplex euklideszi tér vektorai. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x} - iy$ és $i\mathbf{x} + \mathbf{y}$ merőlegesek egymásra, akkor \mathbf{x} és \mathbf{y} lineárisan összefüggők.

8. Igazolja, hogy tetszőleges euklideszi térben teljesül minden \mathbf{x}, \mathbf{y} -ra, hogy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

9. Legyen \mathbf{a} egy V euklideszi tér vektora. Mutassa meg, hogy $\{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle = 0\}$ altér.

10. Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ egy euklideszi tér ortonormált bázisa. Igazoljuk, hogy a tér tetszőleges \mathbf{x}, \mathbf{y} vektoraira teljesül, hogy

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{y} \rangle, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{x} \rangle|^2.$$