A középiskolában a vektorok összegének és valós számszorosának (skalárszorosának) koordinátáiról tanultak alapján definiáljuk az oszlopokba rendezett valós számhármasok összegét és valós számszorosát:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{esetén legyen} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma \in \mathbb{R},\ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{esetén legyen} \quad \gamma\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha_1 \\ \gamma\alpha_2 \\ \gamma\alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Az 1–7. feladathoz legyen

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Számítsuk ki a következőket: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$, $\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}$ $(=\mathbf{b}+\mathbf{c}+(-1)\mathbf{d})$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}-\mathbf{e}$.

2. Milyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ esetén lehet $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

3. Milyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ esetén lehet $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

4. Igaz-e, hogy van végtelen sok $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ valós számötös, melyre $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d}+\varepsilon\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

5. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ közül melyeket lehet felírni a másik négy segítségével összeadás és számmal való szorzás felhasználásával?

6. Van-e $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ között három olyan, melyek úgy is előállítják a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$-t, hogy nem minden együttható 0?

7. Az előző feladatokat megoldásuk után hozzuk kapcsolatba az 1. előadás L ill. Ö rövidítéseivel!

8. Az alábbi vektorok halmazának mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

9. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$, akkor $\lambda = \mu$.

b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

c) Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ és $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $\lambda = \mu$.