Bsc algebra2 gyakorlat

Negyedik feladatsor (4. prezentáció)

1. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját.

(a) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az utolsó három mátrix n-edik hatványát.

(b) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

(c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

2. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós (**geometriai** multiplicitás), akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak (**algebrai** multiplicitás). Vizsgáljuk meg az **1.** feladat mátrixai esetében, hogy mikor teljesül egyenlőség.

3. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.

4. Az M négyzetes mátrix nyoma a főátló elemeinek összege, jele $\mathrm{tr}(M)$ (trace). Igazoljuk:

(1) MN és NM nyoma egyenlő, és ha M invertálható, akkor $\mathrm{tr}(M^{-1}NM) = \mathrm{tr}(N)$.

(2) Ha $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $MN - NM$ nem az egységmátrix.

5. Legyen $k_M(x) = \det(M - xE)$ az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $c(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$ (ahol $c, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). Igazoljuk:

(1) A $k_M(x)$ tényleg n-edfokú polinom, és a főegyüttható $c = (-1)^n$.

(2) Az M sajátértékeinek összege az M nyoma, pontosabban $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathrm{tr}(M)$ (azaz a sajátértékeket az algebrai multiplicitásukkal kell venni). Ez a szám a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(3) Az M sajátértékeinek szorzata $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(M)$, ami k_M konstans tagja.

6. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?

7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha u sajátvektora A-nak és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(b) Ha λ sajátértéke A-nak és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(c) Két sajátvektor összege is sajátvektor.

(d) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.

(e) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.

(f) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.

8. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pont akkor diagonalizálható, ha a sajátalterek összege V.

---

9. Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

(1) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ (Fibonacci-sorozat).

(2) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

(3) $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ ($k \geq 0$).