

**Bsc algebra2 gyakorlat**  
*Harmadik feladatsor (3. és 4. prezentáció)*

1. LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA

1. Az alábbi  $A : V_1 \rightarrow V_2$  leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott határozzuk meg a leképezés kép- és magterét, ezek dimenzióját, és írjuk föl a leképezés mátrixát alkalmas bázisban. A (g) pont esetében a mátrixot csak az origó körüli 90 fokos forgatás; az  $y = x$  egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a  $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ ,  $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$  bázisban.

- (a)  $V_1 = \mathbb{R}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $V_2 = \mathbb{C}$  a  $\mathbb{C}$  felett,  $A$  az  $1 + i$  számmal való szorzás.
- (b)  $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A$  az 3 számmal való szorzás; az  $1 + i$  számmal való szorzás; a négyzetre emelés; a konjugálás; az abszolút érték képzése; a reciprok képzése.
- (c)  $V_1 = \mathbb{R}^n$ ,  $V_2 = \mathbb{R}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(v)$  a  $v$  komponenseinek az összege; szorzata.
- (d)  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(M) = M^T$ ;  $A(M) = 2M$ ;  $A(M) = iM$ ;  $A(M) = M^2$ .
- (e)  $V_1 = \mathbb{R}[x]$  legfeljebb harmadfokú elemei,  $V_2 = \mathbb{C}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(f) = f(i)$ , illetve  $A(f)$  az  $f$  nem nulla együtthatóinak összege; szorzata; négyzetösszege.
- (f)  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemei az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(f) = f'$  (derivált).
- (g)  $V_1$  és  $V_2$  a sík  $\mathbb{R}$  felett,  $A$  egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés.

2. Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Az  $A$  transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Adjuk meg a bázis-transzformáció képletét felhasználva az  $A$  mátrixát az  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  bázisban, továbbá a  $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ ,  $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$  bázisban is.

4. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban  $M$ , mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

5. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.

2. MŰVELETEK LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK KÖZÖTT

6. Tekintsük az alábbi transzformációkat a síkon:  $T$  az  $y = x$  egyenesre tükrözés,  $F$  az origó körüli  $+90$  fokos forgatás,  $X$ , illetve  $Y$  az  $x$ -tengelyre, illetve az  $y$ -tengelyre vetítés.

- (a) Számítsuk ki, hová viszi az  $F + T$  transzformáció az  $(x, y)$  pontot.
- (b) Melyik transzformáció lesz  $X + Y$ ,  $XY$ ,  $F^{1867}$ ,  $T^{1867}$ ,  $FT$ ,  $TF$ ?
- (c) Lineárisan függetlenek-e a  $T$ ,  $F$ ,  $FT$ ,  $TF$  transzformációk?
- (d) Hány dimenziós alteret generálnak az  $F$  pozitív kitevőjű hatványai?

7. Legyen  $M$  az  $y = x$  egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan  $K$  és  $L$  nem nulla, kétszer kettős valós mátrixokat, melyekre  $KM = 0 = ML$ .
8. Legyen  $A, B, C \in \text{Hom}(V)$  és  $\lambda$  skalár. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.
- (a)  $A + B$ ,  $\lambda A$  és  $AB$  lineáris,  $(-A) + A = 0$ ,  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .
- (b)  $(A + B)C = AC + BC$ ,  $C(A + B) = CA + CB$ ,  $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$ .
9. Álljon  $W$  a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az  $(1, 1)$  pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.
10. Egy vektortérben található 1526 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?

### 3. MAGTÉR, KÉPTÉR

11. Az alábbi  $M$  mátrixok esetében határozzuk meg a  $v \mapsto Mv$  leképezés mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Az alábbi  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  leképezések közül a lineárisaknak határozzuk meg a mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{képe} \quad \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + z \\ 4x + 2y + z \\ y + z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

13. Legyen  $W$  a  $V$  véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Igazoljuk, hogy  $V$ -nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek  $W$  a magtere, és olyan is, amelynek  $W$  a képtere. Mikor van olyan transzformáció, amelynek  $W$  **egyszerre** a magtere és a képtere?
14. Igazoljuk, hogy  $AB = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\text{Im}(B) \subseteq \text{Ker}(A)$ .
15. Mi az összefüggés  $A$ ,  $B$  és  $AB$  magterei, illetve képterei között?
16. (\*) Legyen  $V$  véges dimenziós vektortér,  $A : V \rightarrow V$  pedig egy lineáris transzformáció. Ha  $\text{Im}(A^2) = \text{Im}(A)$ , következik-e ebből, hogy  $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$ ? Igaz-e a megfordítás?
17. Egy  $A : V \rightarrow W$  lineáris leképezés magtere 100-dimenziós, és  $v_1, \dots, v_{199} \in V$  független vektorok. Legalább hány különböző van az  $A(v_1), \dots, A(v_n)$  vektorok között?
18. Legyen  $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ . Melyek igazak?
- (a)  $\text{Ker}(A) = V_1 \implies \text{Im}(A) = \{0\}$ .
- (b)  $\text{Ker}(A) = \{0\} \implies \text{Im}(A) = V_2$ .
- (c)  $\text{Im}(A) = V_2 \implies \text{Ker}(A) = \{0\}$ .
- (d) Ha egy  $X$  vektorrendszer képe generátorrendszer, akkor  $X$  is az.
- (e) Ha egy  $X$  vektorrendszer képe független, akkor  $X$  is az.
- (f) Ha  $A$  szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
- (g) Ha  $A$  valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
- (h) Ha  $A$  injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
- (i) Ha  $A$  egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.