Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2016. jan. 26.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Mely $z \in \mathbb{C}$ számokra teljesül, hogy $\mathrm{Re}(iz+1) = \mathrm{Im}(\overline{z}+i)$?

mindegyikre

12. A z, w komplex számokra $|z| = 2$, $|w| = 3$ és $\mathrm{Re}(z/w) = 0$. Mennyi $|z+w|$?

$|z+w| = \sqrt{13}$

13. A $-i\sqrt{3}$ számnak összeadjuk a harmadik gyökeit. Határozzuk meg az eredmény képzetes részét. (A végeredményben ne szerepeljen szögfüggvény.)

0

14. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „Ha a $z \in \mathbb{C}$ komplex számra $z^{120} = 1$, de $z^{60} \neq 1$, akkor z rendje 120.

Pl. $z = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$

15. Az $\{x+y+z=1,\ 2x+2y+z=2\}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval többféleképpen is megoldhatjuk, és mindig egy szabad változó lesz. Soroljuk föl x, y, z közül azokat, amelyek soha nem lehetnek szabad változók.

z

16. Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix-szorzatot.

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

17. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ és B olyan 2×2-es mátrix, melyre AB az egységmátrix hatszorosa. Mi lesz B?

$B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

18. Mennyi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ inverzében a harmadik sor második eleme?

$2i$

19. Az $1, 2, 3, 4, 5$ számok a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 permutációjában k darab inverzió van. Hány inverzió van az a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 permutációban?

$10 - k$

20. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és negyedik oszlopa egyenlő. Az $a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

$a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$

21. Az $x^{10} + x^9 + x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_0$ polinom komplex gyökei $b_1, \ldots, b_{10}$. Mi az x^9 együtthatója abban a tizedfokú normált polinomban, melynek gyökei $b_1 - 3, \ldots, b_{10} - 3$?

31

22. Mi a maradék, ha $\mathbb{Z}_7$ fölött x^3+x+3-at osztjuk $5x^3+3$-mal?

$x + 1$

23. Adjunk meg egy olyan harmadfokú, racionális együtthatós polinomot, melynek $\mathbb{Q}$ fölött nincs gyöktényezős alakja, de $\mathbb{R}$ fölött van, és adjuk is meg az $\mathbb{R}$ fölötti gyöktényezős alakot.

Pl. $x^3 - 2x = x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

24. Egy valós együtthatós polinomnak gyöke egy harmadik primitív egységgyök. Adjuk meg egy $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis tényezőjét.

$x^2 + x + 1$

25. Adjunk meg egy olyan egész együtthatós polinomot, mely $\mathbb{C}$ fölött 3, $\mathbb{Q}$ fölött 2, $\mathbb{Z}$ fölött pedig 4 irreducibilis tényezőre bomlik.

Pl. $6x(x^2 + 1)$

26. Határozzuk meg $(x^4 - 1)^2$ és $(x^2 + 1)^6$ kitüntetett közös osztóját.

$(x^2 + 1)^2$

27. Adjunk meg egy másodfokú polinomot és egy p prímet, amik mutatják, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritériumban szükséges föltenni, hogy a főegyüttható nem osztható p-vel.

Pl. $2x^2 + 4x + 2 = (2x + 2)(x + 1)$ és $p = 2$.

28. Mi a hiba az alábbi gondolatmenetben? „A $6x^2 + 6x = (x + 1) \cdot (6x) = (2x) \cdot (3x + 3)$ e polinom kétféle felbontása $\mathbb{Z}$ fölött, de ez nem mond ellent a számelmélet alaptétele egyértelműségi állításának, mivel itt $2x$ és $6x$, valamint $3x + 3$ és $x + 1$ egymás egységszeresei."

$2x$ és $6x$ nem egységszeresek, mert 3 nem egység $\mathbb{Z}[x]$-ben. (A gondolatmenet helyes lenne $\mathbb{Q}$ fölött. A fenti két felbontás azért nem mond ellent $\mathbb{Z}$ fölött az alaptételnek, mert a tényezők nem mind irreducibilisek $\mathbb{Z}$ fölött: $2x$, $6x$, $3x + 3$ sem primitív.)

29. Adjunk példát, ami mutatja, hogy az $x - 1$ polinom nem prímtulajdonságú $\mathbb{Z}_8[x]$-ben.

Pl. $x - 1$ osztója $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 1$-nek, de egyik tényezőnek sem osztója.

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_5$ fölött irreducibilisek szorzatára a $\Phi_4(x)$ körosztási polinomot.

$x^2 + 1 = (x + 2)(x + 3)$