Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2016. jan. 19.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g nem nulla polinomok nem nulla összegének fokáról szóló állítást **abban az esetben, amikor** $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$.

   Ha $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$, akkor $\mathrm{gr}(f+g) = \max\big(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\big)$.

2. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $f(x)$ polinomnak a b szám **pontosan** k-szoros gyöke.

   Van olyan $g(x)$ polinom, melyre $f(x) = (x-b)^k g(x)$, ahol $g(b) \neq 0$.

3. Definiáljuk a z komplex szám rendjének a fogalmát.

   A $z \neq 0$ rendje az egész kitevőjű, különböző hatványainak a száma.

4. Írjuk föl a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ komplex szám n-edik gyökeit megadó képletet.

   $\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

   Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:** Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Legyen $f \in S_n$ és $1 \leq i < j \leq n$. Mit jelent az, hogy $f(i)$ és $f(j)$ inverzióban vannak az f permutációnál?

Azt, hogy $f(i) > f(j)$.

7. Jellemezzük egy négyzetes mátrix invertálhatóságát a determinánsa segítségével.

Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

8. Mondjuk ki **pontosan** a maradékos osztás tételét $\mathbb{Q}[x]$-ben. Az egyértelműséget nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ és $g \neq 0$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, hogy $f = gq + r$ és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

9. Mondjuk ki az első Gauss-lemmát. (Nem a primitív polinomokról szóló következményét.)

Ha $p \in \mathbb{Z}$ prím, akkor prím $\mathbb{Z}[x]$-ben is.

10. Definiáljuk az R gyűrűben az egység**elem** fogalmát. (Nem az egység fogalmát kell definiálni!)

Az $e \in R$ egységelem, ha minden $r \in R$ esetén $er = re = r$.