Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2016. jan. 19.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „A z és w nem valós komplex számokra felírt háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha z/w valós szám.”

Pl. $z = i,\ w = -i.$

12. Mennyi $(i + \sqrt{3})^7$ képzetes része? A végeredmény konkrét szám legyen (ne szerepeljen benne se szögfüggvény, se binomiális együttható).

-64

13. A $\cos\alpha + i\sin\alpha$ számnak mely $0 \le \alpha \le 180°$ értékekre lesz pontosan két olyan köbgyöke, amelyek valós része negatív?

$0 \le \alpha < 90°$

14. Ha $z \in \mathbb{C}$ rendje 240, akkor mennyi lesz $\overline{z}^{21}$ rendje?

80

15. Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszerben 3 egyenlet és 5 ismeretlen van. Mennyi lehet a megoldások száma?

0 vagy végtelen

16. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha az A és B valós mátrixokra AB és BA is értelmes, akkor $A + B$ is értelmes.”

Pl. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

17. Adjunk meg egy olyan 3×3-as valós mátrixot, melynek a négyzete nem nulla, de a köbe igen.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. Egy 3×3-as A mátrix determinánsa 3, az elemeihez tartozó előjelezett aldeterminánsokat jelölje A_{ij}. Mennyi lesz az $((A_{ij}))$ mátrix determinása?

9

19. Adjuk meg $1, 2, 3, 4, 5$ egy olyan sorrendjét, amelyben pontosan 7 inverzió van.

$5, 4, 1, 2, 3$

20. Egy 8×8-as determinánsban a mellékátló feletti elemek mind nullával egyenlőek. A determináns definícióját felírva hány nem nulla tag keletkezhet?

0 vagy 1

21. Az $x^3 + x + q$ polinom komplex gyökei a, b és c. Mik a gyökei az $x^3 + 4x + 8q$ polinomnak?

$2a$, $2b$, $2c$.

22. Mi a maradék, ha $\mathbb{Z}_7$ fölött x^3+x+3-at elosztjuk $5x+3$-mal?

0

23. A gyöktényezők egyszerre való kiemelhetőségéről szóló tétel így szól: „**szokásos** R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ az f-nek az **összes** R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben." Alkalmazzuk a tételt $R = \mathbb{Q}$ fölött az $f(x) = 2(x-1)^2(x+i)(x-i) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomra, azaz adjuk meg $q(x)$-et, k értékét, valamint a $b_1, \dots, b_k$ számokat.

$q(x) = 2x^2 + 2,\ \ k = 2,\ \ b_1 = b_2 = 1.$

24. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{R}$ fölött az $(x^9 + 1)^3$ polinom?

15

25. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$-ben a $2x^2$ polinom összes (kéttényezős) triviális felbontását sorrendtől eltekintve.

$1 \cdot (2x^2) = (-1)(-2x^2)$

26. Hány osztója van $\mathbb{Q}[x]$-ben a $4(x^4-2)^3(x^3-3)$ polinomnak? Az egységszeres osztókat **nem** különböztetjük meg.

8

27. Adjunk meg egy másodfokú polinomot és egy p prímet, amik mutatják, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritériumban szükséges feltenni, hogy a konstans tag együtthatója p-vel osztható.

Pl. $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$ és $p = 2$.

28. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „Ha egy $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\mathbb{Q}$ fölött is."

Pl. $f(x) = 7$

29. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ **normált,** másodfokú polinomra, amelynek $\mathbb{Z}_6$-ban több, mint 2 gyöke van.

Pl. $(x - 2)(x - 3)$

30. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{Q}$ fölött az $x^{36} - 1$ polinom?

9