Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2016. jan. 05.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Mely z komplex számokra teljesül, hogy $|z|$ nem egyenlő z és $-z$ egyikével sem?

12. Ha $z^2\overline{z}^3 = 1 + i$, akkor hány fokos lehet z szöge?

13. Írjuk föl gyöktényezős alakban az $5x^5 + 5$ polinomot (szögfüggvényeket is használhatunk).

14. Hány 96 rendű komplex szám van?

15. Egy homogén lineáris egyenletrendszerben 23 egyenlet és 37 ismeretlen van. Minimum hány szabad változó lesz?

16. Mely n egészekre igaz, hogy alkalmas $M \in \mathbb{Q}^{7\times n}$ és N mátrixokra $NM^T - M$ értelmes?

17. Adjunk meg olyan A és B mátrixokat, melyekre $ABA = 0$, de $BAB \neq 0$.

Pl.

18. Egy 3×3-as A mátrix inverze $((b_{ij}))$. Az A utolsó oszlopának minden elemét ellentétes előjelűre változtatjuk. Mi lesz az így megváltoztatott mátrix inverze?

19. Egy 3×3-as $((a_{ij}))$ determinánsban $a_{23} = 0$, a többi elem pozitív. A definícióban szereplő képletben, az előjeleket is számításba véve hány pozitív tag lesz?

20. A $\det(M) = \det(M^T)$ bizonyításában az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ permutációt a g permutációnak feleltetjük meg. Mennyi $g(2)$?

21. Az $x + y + z = 0$, $xy + xz + yz = 0$, $xyz = 1$ egyenletrendszernek adjuk meg egy megoldását.

Pl.

22. Mi a maradék, ha $\mathbb{Z}_{11}$ fölött $x^3 + 2$-t elosztjuk $4x + 5$-tel?

23. Írjuk föl az összes olyan valós együtthatós, negyedfokú polinomot, amelynek az $1 + i$ kétszeres gyöke, és konstans tagja 24.

24. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{R}$ fölött az $(x^{30} - 1)^2$ polinom?

25. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „Ha egy racionális együtthatós $f(x)$ polinomnak minden $\mathbb{Q}[x]$-beli felbontása triviális, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.”

Pl.

26. Mely n egészekre teljesül a $10x^6 + 4nx^3 + 60x + 60$ polinomra a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele?

27. Adjunk meg egy másodfokú polinomot és egy p prímet, amik mutatják, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritériumban szükséges feltenni, hogy az x-es tag együtthatója p-vel osztható.

Pl.

28. Hány osztója van $\mathbb{Z}[x]$-ben a $4x^2 - 4$ polinomnak? Az egységszeres osztókat is megkülönböztetjük.

29. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}_4[x]$ nem konstans polinomra, amely egység $\mathbb{Z}_4[x]$-ben.

Pl.

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_7$ fölött irreducibilisek szorzatára a $\Phi_6(x)$ körosztási polinomot.