Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2015. dec. 21.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Számítsuk ki $(2+4i)^{2015}/(1-2i)^{2015}$ abszolút értékét.

2^{2015}

12. Hány fokos $(1+i\sqrt{3})^{2015}$ szöge?

$300°$

13. A z komplex számot elforgatjuk az origó körül $+90$ fokkal, majd tükrözzük az origóra. Fejezzük ki a kapott számot z-vel.

$-iz$

14. Adjuk meg $x^{12}+1$ egy olyan komplex gyökét, melynek a rendje **nem** 24.

Pl. $\cos 45° + i \sin 45°$

15. Írjunk föl egy olyan ellentmondásos lineáris egyenletrendszert, amelyben az egyenletek száma 3, az ismeretlenek száma 4.

Pl. $\begin{aligned} x+y+u+v&=0\\ x+y+u+v&=1\\ x+y+u+v&=2 \end{aligned}$

16. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Ha $A+B$ értelmes, akkor milyen feltétel kell **még** ahhoz, hogy A^TB is értelmes legyen?

Semmilyen.

17. Mi az $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében a második sor harmadik eleme?

$i/2$

18. Az $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrix előjelezett aldeterminánsait A_{ij} jelöli. Mi annak a feltétele, hogy az a_{23} elemet megváltoztatva a determináns értéke ne változzon?

$A_{23} = 0.$

19. Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$, melyekre $\det(A) = 2$ és $\det(B) = 4$. Határozzuk meg $\det(3A^2B^{-1}A^T)$ értékét.

$2 \cdot 3^5 = 486$

20. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és ötödik oszlopa egyenlő. A determináns definíciójában az $a_{44}a_{32}a_{51}a_{23}a_{15}$ tagot melyik tag fogja biztosan kiejteni?

$a_{44}a_{35}a_{51}a_{23}a_{12}$

21. Az $x^4 + x^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$ polinom komplex gyökeinek mi a négyzetösszege?

-2

22. Az $x^4 + x^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak multiplicitással számolva hány valós gyöke lehet?

0 vagy 2

23. Adjunk példát olyan $n \geq 10$-re és $f \in \mathbb{Z}_n[x]$ polinomra, melynek gyöke a 2 és a 7, de nem emelhető ki belőle $(x-2)(x-7)$.

Pl. $n = 10$, $f(x) = 2(x-2)$. Vagy: $n = 15$, $f(x) = (x-2)(x-4)$.

24. Mi az a hiányzó feltétel, ami az alábbi állítást igazzá teszi? „Ha egy harmadfokú polinom esetében a Cardano-képletbeli D kifejezés értéke negatív, akkor az egyenletnek három különböző valós gyöke van.”

Az, hogy a polinom valós együtthatós.

25. Egy huszadfokú valós együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva 8 darab valós gyöke van. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik valós fölött?

14

26. A $6(x+2)(x+3)$ polinomot írjuk föl $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomok szorzataként. Ügyeljünk arra, hogy a megadott tényezők tényleg mind irreducibilisek legyenek. Hány tényező van?

Pl. $(6x+12)(x+3)$, két tényező van.

27. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha T test és $f \in T[x]$ tizedfokú polinom, akkor f akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nincs T-ben gyöke.” A T testet is meg kell adni.

Pl. $f(x) = (x^2+1)^5$, itt $T = \mathbb{R}$.

28. Adjunk példát olyan egész együtthatós f és g polinomokra, amelyekre f osztója g-nek $\mathbb{Q}$ fölött, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

Pl. $f(x) = 2x$, $g(x) = x$

29. Mi a maradék, ha $\mathbb{Z}_5$ fölött $x^3 + 3$-at elosztjuk $3x + 4$-gyel?

1

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_{17}$ fölött irreducibilisek szorzatára a $\Phi_8(x)$ körosztási polinomot.

$x^4 + 1 = (x+2)(x+8)(x+9)(x+15)$