NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Legyen V a valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény $\lambda^2 v$ legyen. Adjunk meg egy olyan vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = \mu = 1$, $v = 1$.

12. Az $\{f \in \mathbb{C}[x] : f(c) = c + 1\}$ milyen $c \in \mathbb{C}$ esetén altér?

$c = -1$

13. Legyen V az $\langle x + 1, x^2 - 1 \rangle$ altér a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterében. Adjuk meg V egy direkt kiegészítő alterét.

Pl. $\langle x \rangle$.

14. Legyen W a szimmetrikus mátrixok altere $\mathbb{R}^{3\times 3}$-ben és U hétdimenziós altér $\mathbb{R}^{3\times 3}$-ban. Hány dimenziós lehet $U \cap W$?

4, 5, 6.

15. Egy háromelemű vektorhalmaz rangja 2. Hány olyan eleme lehet, amely függ a másik kettőtől?

1, 2, 3.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $C(A+B) = CA+CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:} \begin{array}{ll} \text{4 v. 5 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 v. 3 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \big(C(A+B)\big)(v) &= && \boxed{\text{P}} \\ C\big((A+B)(v)\big) &= && \boxed{\text{S}} \\ C\big(A(v)+B(v)\big) &= && \boxed{\text{T}} \\ C\big(A(v)\big)+C\big(B(v)\big) &= && \boxed{\text{P}} \\ (CA)(v)+(CB)(v) &= && \boxed{\text{S}} \\ (CA+CB)(v) & && \end{aligned}$$

18. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^6)$ és $r(A) = 2$, akkor hány különböző sajátértéke lehet A-nak?

1, 2, 3.

19. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $1 + r(MN) = r(M+N)$.

Pl. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

20. Ha A minimálpolinomja x^2+1 és v tetszőleges vektor, akkor mennyi $A^4(v)$?

v

21. Ha M és $2M$ hasonlók, akkor mely komplex számok lehetnek sajátértékei M-nek?

Csak a 0.

22. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ minimálpolinomja $(x^2+1)^2$. Mik M determinánsának a lehetséges értékei?

i, $-i$.

23. Egy 2 rangú $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrixnak sajátértéke a $2+i$. Mi a Jordan-alakja?

$$\begin{pmatrix}2+i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2-i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

24. Ha $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ és $(a+c)^2 + (b+d)^2 = 2$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor mennyi lehet $ad - bc$?

0

25. Adjunk példát, ami cáfolja az alábbi állítást: „az önadjungált mátrixok alteret alkotnak."

A $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ önadjungált mátrix i-szerese nem önadjungált.

26. Adjuk meg az összes olyan 2×2-es unitér mátrixot, amelyben 2 darab 1-es szerepel.

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

27. Mely $d \in \mathbb{C}$ számra lesz $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & d\end{pmatrix}$ normális?

$d = 1$.

28. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-n az $A(M) = -M^T$ lineáris leképezésnek egy egydimenziós invariáns alterét.

Pl. a λE alakú mátrixok ($\lambda \in \mathbb{R}$).

29. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1, 0, i)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(i, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$.

30. Adjunk példát olyan c számra, melyre $\begin{pmatrix}1 & c\\ c & 1\end{pmatrix}$ kvadratikus karaktere indefinit.

Pl. $c = 2$.