Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2015. jún. 16.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját **a halmazos jelöléssel**, figyelve arra, hogy mik a futó változók, és mik nem.

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$

2. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

3. Mondjuk ki az altér dimenziójáról szóló tételt véges dimenziós V vektortérre, figyelve arra is, hogy mikor állhat egyenlőség.

Ha W altere V-nek, akkor $\dim W \leq \dim V$, és egyenlőség csak $V = W$ esetén lehetséges.
Elfogadjuk: Ha W valódi altér V-ben, akkor $\dim W < \dim V$.

4. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött ki lehet számítani.

$\langle b_i, v \rangle$ (fontos a sorrend!)

5. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok
az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan
$A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

6. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

$\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ minden v és w vektorra.

9. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor unitér. (Az unitér és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor unitér, ha minden sajátértéke 1 abszolút értékű.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely $A \in \mathrm{Hom}(V)$ esetében kapcsolatot létesít A és A^* invariáns alterei között.

Ha a W altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ ortogonális kiegészítő altér A^*-invariáns.