NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Legyen V a nemnegatív valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény a két szám szorzatának abszolút értéke legyen. Adjunk meg az utolsó négy, skalárokat is tartalmazó vektortéraxióma közül egy olyat, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

> Pl. $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $v = 1$.

12. Adjuk meg $\mathbb{C}$ egy részhalmazát, mely valós skalárral szorzásra zárt, de összeadásra nem.

> Pl. a valós számok és a tisztán képzetes számok (együtt).

13. Legyen V a szimmetrikus mátrixok altere $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben és W olyan altér, melyre $V \cap W = \{0\}$. Hány dimenziós lehet W?

> 0 vagy 1.

14. Adjunk $\mathbb{R}[x]$-ben ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektorrendszer összefüggő, akkor minden vektora függ a többi vektorból álló rendszertől."

> Pl. $\{0, x\}$.

15. Egy vektortér milyen X részhalmazaira igaz, hogy X minimális generátorrendszer $\langle X \rangle$-ben?

> Ha X független.

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy Hom(V)-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((\lambda A)B\big)(v) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$(\lambda A)\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$\lambda\big(A(B(v))\big) = \quad \boxed{\text{A}}$$
$$A\big(\lambda(B(v))\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$A\big((\lambda B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$\big(A(\lambda B)\big)(v)$$

18. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és A^2 az identitás, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

    6

19. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $1 + r(MN) = r(M) + r(N)$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20. Ha $f(x) = x^2 + i$, $f(A) = 0$ és $v \in \mathrm{Ker}(A)$, akkor mennyi v?

    0

21. Adjunk meg egy olyan nem nulla M mátrixot, melyre M és $-M$ hasonlók.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

22. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ minimálpolinomja $x^3 - x^2$. Mik M rangjának a lehetséges értékei?

    2, 3, 4.

23. Egy 3×3-as valós mátrixnak sajátértéke $1 + i$ és 2. Mennyi a determinánsa?

    4

24. Mennyi $(1, 1, 1, 1)$ és $(1, -1, -1, -1)$ szöge?

    $120°$

25. Melyek azok az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixok, melyeknek $(1, 0)^T$ sajátvektora?

    M diagonális.

26. Bontsuk föl a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.

    $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

27. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra lesz $-x^3 + c$ egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja?

    $c = \pm 1$

28. Adjunk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-n a transzponálásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

    Pl. a diagonális mátrixok.

29. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1, 0, i)$ és $(1, i, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(i, 1, 1)$.

30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a bal felső sarokhoz tartozó négyzetes részmátrixok determinánsai között van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit."

    $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$