

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Legyen V a nemnegatív valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény a két szám szorzatának abszolút értéke legyen. Adjunk meg az utolsó négy, skalárokot is tartalmazó vektortéraxióma közül egy olyat, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjuk meg \mathbb{C} egy részhalmazát, mely valós skalárral szorzásra zárt, de összeadásra nem.

13. Legyen V a szimmetrikus mátrixok altere $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben és W olyan altér, melyre $V \cap W = \{0\}$. Hány dimenziós lehet W ?

14. Adjunk $\mathbb{R}[x]$ -ben ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektorrendszer összefüggő, akkor minden vektora függ a többi vektorból álló rendszertől.”

15. Egy vektortér milyen X részhalmazaira igaz, hogy X minimális generátorrendszer $\langle X \rangle$ -ben?

- 16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(A) A skalárszoros-tartó.

(B) B skalárszoros-tartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((\lambda A)B)(v) = \quad \square$$

$$(\lambda A)(B(v)) = \quad \square$$

$$\lambda(A(B(v))) = \quad \square$$

$$A(\lambda(B(v))) = \quad \square$$

$$A((\lambda B)(v)) = \quad \square$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

18. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és A^2 az identitás, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

19. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixra, melyekre $1 + r(MN) = r(M) + r(N)$.

20. Ha $f(x) = x^2 + i$, $f(A) = 0$ és $v \in \text{Ker}(A)$, akkor mennyi v ?

21. Adjunk meg egy olyan nem nulla M mátrixot, melyre M és $-M$ hasonlók.

22. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ minimálpolinomja $x^3 - x^2$. Mik M rangjának a lehetséges értékei?

23. Egy 3×3 -as valós mátrixnak sajátértéke $1 + i$ és 2 . Mennyi a determinánusa?

24. Mennyi $(1, 1, 1, 1)$ és $(1, -1, -1, -1)$ szöge?

25. Melyek azok az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ normális mátrixok, melyeknek $(1, 0)^T$ sajátvektora?

26. Bontsuk föl a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix}$ mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.

27. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra lesz $-x^3 + c$ egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja?

28. Adjunk meg $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -n a transzponálásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

29. Adjuk meg \mathbb{C}^3 -ben az $(1, 0, i)$ és $(1, i, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a bal felső sarokhoz tartozó négyzetes részmátrixok determinánsai között van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.”