Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi, A változat (2015. május 14.) — eredmények és pontozás

1. A mátrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek 4 és -1 (2 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$4\Big(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\Big)^2 - \Big(\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

2. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{2})(0,1,-1)$ (1 pont). Ha $v = (2,-1,0)$, akkor Gram-Schmidt eljárással $b_2 = (1/\sqrt{18})(4,-1,-1)$ (3 pont). A W normálvektora $(1/3)(1,2,2)$ (1 pont), ezért a keresett távolság $|\langle n,(1,2,-3)\rangle| = 1/3$ (1 pont).

3. A karakterisztikus polinom $x^4 - x^3 - x^2 + x$ (1 pont), a sajátértékek 0, 1 (kétszeres), és -1 (2 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x+1)(x-1)$ és $x(x+1)(x-1)^2$. Az elsőnek a mátrix nem gyöke, ezért a minimálpolinom $x(x+1)(x-1)^2$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 1-hez tartozó blokk 2×2-es, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

4. Mivel $\|u+iv\|^2 = \langle u+iv, u+iv\rangle = \langle u,u\rangle + i\langle u,v\rangle + \bar{i}\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$, ezért $\|u+iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ azzal ekvivalens, hogy $\langle u,v\rangle$ valós (4 pont). Ezért a feladatbeli következtetés igaz, de a megfordítás nem, ellenpélda például a $\mathbb{C}^1$-beli $u = v = 1$ (2 pont).

5. Mivel $A = A^* = A^{-1}$, ezért $A^2 = I$ (2 pont). Tehát $m_A(x) \mid x^2 - 1$ (1 pont). Mindegyik normált osztó meg is felel: $A = E$ esetén $x-1$ (1 pont), $A = -E$ esetén $x+1$ (1 pont), ha pedig A mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, akkor x^2-1 (1 pont) a minimálpolinom.

6. Egészítsük ki b_1, b_2-t b_3-mal ONB-vé. Ebben A mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ \alpha & 0 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

alakú, alkalmas $u,v,w \in \mathbb{C}$-re (3 pont). Az $MM^* = M^*M$ egyenletet felírva a mátrix középső elemére $|\alpha|^2 + |v|^2 = 0$ adódik, ahonnan $\alpha = 0$ (2 pont). Az $A = 0$ példa megfelelő erre (1 pont). *Második megoldás:* Legyen A minimálpolinomja $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$, ennek A gyöke, ezért $A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_0E = 0$. Ezt b_2-re alkalmazva $a_0b_2 = 0$, azaz $a_0 = 0$. Mivel $A(b_1) = \alpha b_2$, ezért $A^2(b_1) = A(\alpha b_2) = \alpha A(b_2) = 0$. Ezért a fenti transzformációt b_1-re alkalmazva $a_1\alpha b_2 = 0$, azaz ha $\alpha \neq 0$, akkor $a_1 = 0$ adódik. Ekkor a 0 legalább kétszeres gyöke a minimálpolinomnak, ami ellentmond annak, hogy A normális, és így diagonalizálható. Megjegyezzük, hogy ebben a megoldásban nem használtuk ki, hogy $b_1 \perp b_2$.