Bsc algebra2 gyakorlat

Hetedik feladatsor (2015 tavasz, 9. prezentáció)

1. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(1) Ha $Av = \lambda v$ és $A^* w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.
(2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.
(3) $AA^* = 0 \implies A = 0$.
(4) $A^* B = BA^* = 0 \implies \operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$.

2. Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB pont akkor önadjungált, ha $AB = BA$.

3. Mutassuk meg, hogy az A transzformáció akkor és csak akkor normális, ha tetszőleges v vektorra $\|Av\| = \|A^* v\|$ teljesül.

4. ***(*)*** Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, és hogy egy transzformáció pontosan akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek felcserélhetők.

---

5. Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

6. Mutassuk meg, hogy A minden sajátalterének minden altere, továbbá $\operatorname{Im}(A)$ és $\operatorname{Ker}(A)$ is A-invariáns altér.

7. Legyen A a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg A invariáns altereit.

8. Határozzuk meg egy 4×4-es Jordan-blokk invariáns altereit. Függ-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?

9. Milyen kapcsolatban állnak A és A^* karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?

10. Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?

11. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\operatorname{Im}(A)$ és $\operatorname{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.

Néhány feladat eredménye

6/3. (1): Pitagorasz tétele; komplex fölött $\Rightarrow$ igaz, $\Leftarrow$ nem. (2): A rombusz átlói merőlegesek; komplex fölött $\Leftarrow$ igaz, $\Rightarrow$ nem. (3): A paralelogramma átlóinak a négyzetösszege ugyanaz, mint az oldalainak a négyzetösszege; komplex fölött is igaz. $\square$

6/5. Használjuk a Cauchy-egyenlőtlenséget. A maximum értéke $\sqrt{30}$. $\square$

6/7. $b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ ONB W-ben. Az ortogonalizációt $(1,2,3,4)$-gyel folytatva $w = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$, aminek a hossza, és így a keresett távolság 5, továbbá $b_4 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

Második megoldás: A W altér a $v = (1,1,1,1)$ vektorra merőleges vektorok halmaza. Legyen $(1,2,3,4) = \lambda(1,1,1,1) + u$, ahol $u \in W$. Ezt skalárisan v-vel szorozva $v \perp u$ miatt $1+2+3+4 = 4\lambda$, ahonnan $\lambda = 5/2$ és $u = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$. Az $(1,2,3,4)$ távolsága W-től (azaz a W-re vett merőleges vetületétől) a λv hossza, azaz 5. $\square$

6/8. $b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ egy ONB U-ban. Az $U^\perp$ alteret az U normálvektora generálja, elemei $(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$. A keresett felbontás $(1,0,0,0) = (1/4)(3,-1,1,1) + (1/4)(1,1,-1,-1)$. □

6/11. A négyzetösszeg alakok a következők.

$$x^2 - xy + y^2 = (1/2)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + (3/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2, \text{ pozitív definit.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2,$$

pozitív szemidefinit (a 0 is sajátérték).

$$x^2 - 3xy + y^2 = -(1/2)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + (5/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2, \text{ indefinit.}$$

$$x^2 + xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{2})x + y}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1-\sqrt{2})x + y}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2,$$

indefinit.

$$-x^2 + 10xy - y^2 - z^2 = -6\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 4\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2 - z^2,$$

indefinit.

$$xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{x+\sqrt{2}y+z}{2}\Big)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}\Big)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).

$$xy + xz + yz = \Big(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2 - (1/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2 - (1/2)\Big(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\Big)^2,$$

indefinit. Itt vigyázni kell, mert a $-1/2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér kétdimenziós, ebben a Gram–Schmidt-eljárással adtunk meg ONB-t (ami nem is egyértelmű).

$$-x^2 + 2xy + 2xz = \Big(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2 - 2\Big(\frac{-2x+y+z}{\sqrt{6}}\Big)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték). □

6/12. Egyik sem négyzetösszeg alak, mert abban az együtthatókból képzett vektoroknak bázist kell alkotniuk. Az első felírásból így is látszik, hogy ez az alak pozitív definit. □

6/14. A síkon a(z origót fixáló) tükrözések, forgatások ortogonálisak, hiszen egybevágósági transzformációk, de a vetítés nem az. A tükrözés és a merőleges vetítés szimmetrikus (mert ONB-ben diagonalizálható valós fölött), de a forgatás csak akkor, ha a szöge $k180°$. □

6/15-16. A nem normális (a mátrixa egy Jordan-blokk, nem ortonormált bázisban sem diagonalizálható). B unitér, így normális, de nem önadjungált (valósban ortogonális, de nem szimmetrikus). C nem normális, de azért nem ortonormált bázisban diagonalizálható (ez egy nem merőleges vetítés). D önadjungált, így normális, de nem unitér (valósban szimmetrikus de nem ortogonális). E normális, de se nem önadjungált, se nem unitér. F ortogonális és szimmetrikus is. G ortogonális, de nem szimmetrikus, H szimmetrikus, de nem ortogonális. □