Bsc algebra2 gyakorlat

Hatodik feladatsor (2015 tavasz, 7. és 8. prezentáció)

A $v = (a_1, \ldots, a_n)$ és $w = (b_1, \ldots, b_n)$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle v, w\rangle = \overline{a_1}b_1 + \ldots + \overline{a_n}b_n$ (a felülvonás komplex konjugáltat jelöl; a képlet valósban is működik, amikor a konjugáltat ki sem kell írni). Ez mindkét változóban összegtartó, $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$, $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, és $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (vagyis a sorrend megfordításakor konjugálni kell). A v és w *ortogonális* (merőleges), ha skaláris szorzatuk nulla. A v *hossza* $\|v\| = \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ (a valós esetben az abszolút érték kiírására sincs szükség). Ha v és w komponensei valósak, akkor az α szögüket a $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$ képlet definiálja. A Cauchy-egyenlőtlenség biztosítja, hogy a képletből kapott $\cos\alpha \in [-1, 1]$.

Ha W altér, akkor azok a vektorok, amelyek W minden elemére merőlegesek, a $W^\perp$ *ortogonális kiegészítő alteret* alkotják, melynek W-vel vett direkt összege az egész tér.

Azt mondjuk, hogy $b_1, \ldots, b_n$ *ortonormált bázis*, röviden ONB, ha elemei páronként merőlegesek és hosszuk 1. Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor *balról* b_i-vel skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v\rangle$. Ezért egy A lineáris transzformáció mátrixa ebben az ONB-ben $((\langle b_i, A(b_j)\rangle))$. Ortonormált bázist a *Gram-Schmidt eljárással* készíthetünk: ha $b_1, \ldots, b_k$ már megvan, és v nincs benne az általuk generált altérben, akkor b_{k+1}-et a következőképpen kapjuk. A v vektor b_i irányú vetületének hossza $\langle b_i, v\rangle$, ezért $b = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_k, v\rangle b_k$ már merőleges mindegyik b_i-re. A b vektort *normáljuk,* azaz $b_{k+1} = b/\|b\|$. Itt $\langle b_1, \ldots, b_k, v\rangle$ és $\langle b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\rangle$ ugyanaz az altér, és $\|b\|$ a v pont *távolsága* a $\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ altértől.

1. Határozzuk meg az alábbi két pontpár távolságát: $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 1)$; $(1, 1, i)$ és $(0, i, 1)$. Számítsuk ki az első két vektor szögét és a második két vektor skaláris szorzatát is.

2. Igazoljuk, hogy $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ és $b_1 = (1, -1)/\sqrt{2}$ ONB $\mathbb{C}^2$-ben is. Adjuk meg ebben $(1, 2)$ és $(1, i)$ koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.

3. Bizonyítsuk be tetszőleges valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításáról van szó? Melyek igazak komplex felett is?

(1) $x \perp z \iff \|x + z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$.
(2) $\|x\| = \|z\| \iff x + z \perp x - z$.
(3) $\|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2$.

4. Legyen α_n, illetve β_n az a szög, amelyet az n-dimenziós egységkocka testátlója egy éllel, illetve egy ($n - 1$-dimenziós) lappal bezár. Számítsuk ki α_4, β_4 és $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ értékét.

5. Mennyi $a + 2b + 3c + 4d$ maximuma, ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$?

6. Legyen W a térben az $x + y - z = 0$ egyenletű sík. Adjunk meg W-ben a Gram–Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.

7. Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

8. Legyen $U \le \mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U-ban egy ONB-t, határozzuk meg $U^\perp$ elemeit, végül írjuk fel az $(1, 0, 0, 0)$ vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.

9. Igazoljuk, hogy ha b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ONB, akkor $\langle b_1, b_2, b_3\rangle^\perp = \langle b_4, b_5\rangle$.

10. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T Au$ szorzatot.

11. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: x^2+y^2, x^2-y^2, xy, $x^2-2xy+y^2$, x^2-xy+y^2, $x^2-3xy+y^2$, x^2+xy, $-x^2+10xy-y^2-z^2$, $xy+yz$, $xy+yz+xz$, $-x^2+2xy+2xz$.

12. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2+y^2+(x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x-y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)?

13. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ és $v^T = (y_1, y_2, y_3)$. Számítsuk ki az $u^* Av$ mátrix-szorzatot, továbbá a $\langle A^*u, v\rangle$ és $\langle u, Av\rangle$ skaláris szorzatokat.

$B = A^*$ pontosan akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$. Az A^* mátrixa (ortonormált bázisban) az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció pontosan akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy $\mathbb{C}$ feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha normális. Egy $\mathbb{R}$ feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha szimmetrikus (ez a *főtengelytétel*). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

14. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

15. A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix}, \quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

16. Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix}, \quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix}, \quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ± 1-et tartalmazó blokkokra bomlik.