Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi, B változat (2015. március 26.) — eredmények és pontozás

1. Az U_1 nem altér, mert x benne van, de $2x$ nincs (2 pont). Az U_2 dimenziója 3 (1 pont). Ha $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, akkor a feltétel $0 = f'(2) = 12a + 4b + c$. Bázis például $1, x^2 - 4x$, $x^3 - 12x$ (1 pont). A függetlenség és a generátorrendszer-tulajdonság ellenőrzése 1+1 pont. Egy lehetséges gondolatmenet a következő. A megadott polinomok függetlenek, mert csupa különböző fokúak. Az U_2 valódi altér, mert pl. x nincs benne, így dimenziója legfeljebb 3, és így minden 3 elemű független rendszer max. független, azaz bázis.

2. Az A nem lineáris, mert ha $M = E$, akkor $A(2M) = 4E$, ami nem egyenlő $2A(M) = 2E$-vel (2 pont). A B lineáris (0 pont), a szokásos bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

3. Bázistranszformációt végzünk: $S = \left[[1+2x]_{(1,x)}, [1-x]_{(1,x)}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3 pont), ennek inverze $S^{-1} = -(1/3) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), az eredmény $S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont). *Második megoldás:* $C(1 + 2x) = C(1) + 2C(x) = (1 + x) + 4x = 5x + 1$ és $C(1 - x) = C(1) - C(x) = 1 - x$ (2+2 pont). De $5x + 1 = 2 \cdot (1 + 2x) - 1 \cdot (1 - x)$ és $1 - x = 0 \cdot (1 + 2x) + 1 \cdot (1 - x)$, ezért a fenti mátrix adódik (2 pont, az együtthatókat lineáris egyenletrendszerek megoldásával kapjuk.)

4. A $B(f) = 0$ feltételből kapott lineáris egyenletrendszer megoldása $(a, b, c) = (-2c, 2c, c)$ (2 pont), ezért a magtér dimenziója 1 (1 pont), és így a képtér a dimenziótétel miatt $3 - 1 = 2$-dimenziós (1 pont). Az $(a + b)x^2 + (a + 2c)x + (3a + b + 4c) = ux^2 + vx + w$-ből adódó egyenletrendszer (ahol u, v, w paraméterek, a, b, c ismeretlenek) akkor oldható meg, ha $w = u + 2v$, ezért a képtérben az $ux^2 + vx + (u + 2v)$ alakú polinomok vannak (2 pont).

5. A szokásos bázisban $[T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ahonnan a megfelelő mátrixműveleteket elvégezve $[F^2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[FTF] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[FTF + id] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (eddig 3 pont). E három mátrix koordinátáit a szokásos bázisban felírva, és a kapott $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat egy mátrix oszlopaiba beírva $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ adódik (1 pont). Gauss-elinimációval számolva a rang 2 (2 pont). (Persze közvetlenül is látszik, hogy a mátrixok között két független van, de három már nincs, mert az első a második és a harmadik különbsége.)

6. Az összeg dimenziója $3 + 3 - 1 = 5$ (1 pont), tehát a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt az összeg csak $\mathbb{R}^5$ lehet (1 pont). Megfelelő példa a következő:

$$U = \{[a + b, a + c, -a, a, a]^T \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\} \qquad \text{és} \qquad U = \{[f, f, -f, d + f, e + f]^T \,:\, d, e, f \in \mathbb{R}\}$$

(indoklással 4 pont).