Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi, A változat (2015. március 26.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont, 90 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név, a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve (HZ vagy KE). A dolgozat érdemjegye az összpontszám hatodrésze.

1. Legyen V a legfeljebb harmadfokú, racionális együtthatós polinomok (és a 0) $\mathbb{Q}$ feletti vektortere, továbbá

a) $W_1 = \{f \in V \,:\, f'(1) = 0\}$ (a vessző deriváltat jelöl);
b) $W_2 = \{f \in V \,:\, f \text{ normált}\} \cup \{0\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (de ne igazoljuk, hogy altér). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

2. Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, továbbá $A, B : V \to V$, ahol

a) $A(M) = M - m_{11}E$ (itt E az egységmátrix, m_{11} pedig az M mátrix bal felső sarkában álló elem);
b) $B(M) = M^T M$.

Amelyik nem lineáris transzformáció A és B közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázisban (de ne igazoljuk, hogy lineáris).

3. Legyen V a legfeljebb elsőfokú, valós együtthatós polinomok (és a 0) $\mathbb{R}$ feletti vektortere. Ha $C \in \mathrm{Hom}(V)$ mátrixa az $(1, x)$ bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, mi C mátrixa az $(1+x, 1-2x)$ bázisban?

4. Legyen $V = \{f(x) = ax^2 + bx + c \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a legfeljebb másodfokú polinomok (és a 0) vektortere $\mathbb{R}$ fölött, továbbá $A(f) = (a+b)x^2 + (a+c)x + (3a+2b+c)$. Határozzuk meg A magterét, képterét, és ezek dimenzióját.

5. Legyen T a síkon az x-tengelyre való tükrözés, F pedig forgatás az origó körül -90 fokkal. Írjuk fel ezek mátrixát a szokásos bázisban, és határozzuk meg a $\{TF, TFT, TF+F\}$ vektorrendszer rangját.

6. Adjunk példát $\mathbb{R}^5$-ben olyan U és V háromdimenziós alterekre, melyek metszete egydimenziós, és tartalmazza az $[1, 1, 2, 1, 1]^T$ vektort. Határozzuk meg a két megadott altér összegét is.