**Bsc algebra2 gyakorlat**

*Első feladatsor (2015 tavasz, 1. előadás)*

**Követelmények.** A két zárthelyinek legalább $12-12$ pontosnak kell lennie; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. A `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag/` címen található tematikában olvasható, hogy **mely előadás anyagából mely napokon van a röpdolgozat.** Ezeken egy definíciót vagy tételt kell **precízen** leírni (segédeszköz használata nélkül). A 9 röpzéhából 9 pontot kell elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen. Az összpontszám számít a gyakorlati jegy kerekítésénél, illetve a javító engedélyezésénél. A teljesen helyes válaszra 2 pont, az apró hibákkal tarkítottra 1 pont jár. A röpdolgozatok anyagát kell tudni a vizsga első részéhez is. A fenti weblapról letölthető az előadás, a gyakorlat feladatsora, és általános információk is találhatók. Elérhetőség: `ewwkiss@gmail.com`.

**1.** Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mindegyik mátrixban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet, az összes lehetséges módon.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&4&6\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

**2.** Igazoljuk az alábbiakat.

(1) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(2) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(3) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

Általánosítsuk a (3) állítást. Ismerünk-e hasonlót egy determináns oszlopairól?

**3.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

($a$) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.
($b$) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.
($c$) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$.

**4.** Igazoljuk, hogy páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

**5.** Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők. Igazoljuk, hogy $(x-a)(x-b)$, $(x-b)(x-c)$, $(x-a)(x-c)$ lineárisan függetlenek.

**6.** Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként? Lineárisan függetlenek-e 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ a racionális számok teste fölött?

**7.** Tegyük fel, hogy egy vektortér $a, b, c, d$ vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg $d$-t.

**8.** Mely $n$-ekre igaz a következő állítás: ha $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ is függetlenek.

**9.** Van-e három olyan vektor $\mathbb{R}^2$-ben, melyek három darab kételemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3 független? Van-e négy olyan vektor $\mathbb{R}^3$-ben, melyek négy darab háromelemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3, 4 független? És ha a vektorok egyike sem nulla?

**10.** Tegyük föl, hogy létezik az $AB$ mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?
(1) $AB$ oszlopvektorai az $A$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(2) $AB$ oszlopvektorai a $B$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(3) $AB$ sorvektorai a $B$ sorvektorainak lineáris kombinációi.
(4) $AB$ sorvektorai a $B$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

**11.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ tetszőleges adott mátrix. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül (a megfelelő magasságú nullvektort 0 jelöli):
(1) Ha az $A$ oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0-tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
(2) Ha az $A$ sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
(3) Ha az $A$ oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
(4) Ha az $A$ oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

---

**12.** Altér-e a $W$ halmaz a $V$ vektortérben az alábbi esetekben?
(1) $V = T[x]$ a $T$ test fölött és $W$ (1) a legfeljebb tizedfokúak és a zéruspolinom; (2) a legalább tizedfokúak és a zéruspolinom; (3) a páros fokú polinomok és a zéruspolinom; (4) azok a polinomok, ahol minden tag foka páros.
(2) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $W$ azok a mátrixok, melyeknek (5) minden eleme racionális; (6) determinánsa nulla; (7) van két azonos eleme; (8) az első sor első két eleme azonos; (9) az elemek összege nulla; (10) az elemek szorzata nulla; (11) az elemek összege 3; (12) az elemek négyzetösszege 0.
(3) $V$ a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ fölött, és $W = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.
(4) $V$ a sík $\mathbb{R}$ fölött, $W$ pedig az első és harmadik síknegyed uniója. Adjuk meg ebben a vektortérben az összes alteret.

**13.** Legyen $W$ altere az $\mathbb{R}$ fölötti $V$ vektortérnek, és $u, v \in V$.
(1) Ha $u \in W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?
(2) Ha $u \notin W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?
(3) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?
(4) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + 9v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?
Minden nem igaz állításra adjunk is ellenpéldát.

**14.** Igaz-e $\mathbb{R}$ fölött, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$?

**15.** Ha egy $V$ vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a $c$?

**16.** Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér? Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

**17.** Mikor lesz egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere?

**18.** Mely lineáris egyenletrendszerekre igaz, hogy a megoldásaik alteret alkotnak?

**19.** Igazoljuk, hogy minden vektortérben $0 \cdot v = \lambda \cdot 0 = 0$ és $\lambda(-v) = (-\lambda)v = -\lambda v$.

**20.** ***(*)*** Legyen $V$ vektortér a $T$ test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

**21.** ***(*)*** Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ test feletti $\mathbb{Z}_2^2$ és $\mathbb{Z}_2^3$ vektortereknek? És a $\mathbb{Z}_7$ feletti $\mathbb{Z}_7^2$-nek?