Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2015. jan. 16.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $f(x)$ polinomnak a b szám **pontosan** k-szoros gyöke.

Van olyan $g(x)$ polinom, melyre $f(x) = (x-b)^k g(x)$, ahol $g(b) \neq 0$.

2. Mondjuk ki a binomiális tételt szummás alakban.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

3. Definiáljuk a z komplex szám rendjének a fogalmát.

A $z \neq 0$ rendje az egész kitevőjű, különböző hatványainak a száma.

4. Írjuk föl a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ komplex szám n-edik gyökeit megadó képletet.

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:** Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsát definiáló képletet (nem a kifejtési tételt!).

$\sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} \dots a_{nf(n)}$

7. Mondjuk ki a permutációk előjelének szorzástételét.

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(f \circ g) = \mathrm{sg}(f)\,\mathrm{sg}(g)$

8. Írjuk föl az $a_1, \dots, a_n$ (páronként különböző) helyekhez tartozó $\ell_1(x)$ **első** Lagrange-féle interpolációs **alap**polinomot.

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}$$

9. Definiáljuk a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomot a gyöktényezős alakja segítségével (tehát **nem** a rekurziós képletet kell felírni).

$\Phi_n(x) = (x-\eta_1)\dots(x-\eta_k)$, ahol $\eta_1, \dots, \eta_k$ az n-edik primitív egységgyökök ($k = \varphi(n)$).

10. Definiáljuk, mit jelent, hogy a p elem prím. (Nem a felbonthatatlan elem fogalmát kérdezzük!)

A p akkor prím, ha nem nulla, nem egység, és minden b, c-re $p \mid bc \Rightarrow p \mid b$ vagy $p \mid c$.