Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2015. jan. 6.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és a $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k együtthatóját **szummás alakban.**

$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$

2. Mit jelent az, hogy egy polinomnak **van** gyöktényezős alakja **egy** T **test** fölött? (Ügyeljünk rá, hogy a definícióból látsszon, hogy pl. $\mathbb{R}$ fölött nincs minden polinomnak gyöktényezős alakja.)

Azt, hogy felírható $c(x - b_1)\ldots(x - b_n)$ alakban, ahol $c, b_1, \ldots, b_n \in T$.

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy a komplex konjugálás hányadostartó.

Ha $w, z \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $\overline{w/z} = \overline{w}/\overline{z}$.

4. Írjuk föl trigonometrikus alakban az n-edik **primitív** komplex egységgyököket.

$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $(k, n) = 1$.

5. Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{C}^{a \times b}$ és $N = ((n_{ij})) \in \mathbb{C}^{b \times c}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix u-adik sorának w-edik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

$\sum_{\ell=1}^{b} m_{u\ell} n_{\ell w} = m_{u1} n_{1w} + \ldots + m_{ub} n_{bw}$

6. Írjuk fel az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns utolsó oszlopa szerinti kifejtését. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij}.

$a_{1n}A_{1n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kn}$

7. Mondjuk ki a maradékos osztás tételének **egyértelműségi** állítását $\mathbb{R}[x]$-ben. A létezést nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$, ahol $g \neq 0$, és $f = gq_1 + r_1 = gq_2 + r_2$, ahol $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}[x]$, $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$ vagy $r_1 = 0$ és $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$ vagy $r_2 = 0$, akkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

8. Definiáljuk az n-változós $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ elemi szimmetrikus polinomot (ami egy n-edfokú polinom gyökeinek és együtthatóinak összefüggésében szerepel). Hány tagja van ennek?

Az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül az összes lehetséges módon kiveszünk k darabot, ezeket összeszorozzuk, és a kapott $\binom{n}{k}$ tagot összeadjuk.

9. Mondjuk ki az első Gauss-lemma második következményét (a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölötti oszthatóság kapcsolatáról). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Ha $f, h \in \mathbb{Z}[x]$, ahol f primitív, $g \in \mathbb{Q}[x]$ és $fg = h$, akkor $g \in \mathbb{Z}[x]$.

10. Definiáljuk az R szokásos gyűrűben a felbonthatatlan elem fogalmát. Az egység, illetve a triviális felbontás fogalmát nem kell definiálni.

Az $r \in R$ felbonthatatlan, ha nem nulla, nem egység, és minden felbontása triviális.