Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2015. jan. 6.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. Ha $z = 1 + iy$, akkor $|z|^2 = 1 + y^2$.

Pl. $y = 2i$.

12. Az $1 - 2i$ pontot $+90°$ fokkal elforgatjuk az origó körül. Mennyi lesz a kapott pont távolsága az $1 - i$ ponttól?

$\sqrt{5}$

13. Soroljuk föl $-1 + i$ azon kilencedik gyökeit, melyek a negyedik síknegyedbe esnek.

$\sqrt[18]{2}(\cos 295° + i \sin 295°)$, $\sqrt[18]{2}(\cos 335° + i \sin 335°)$.

14. Ha ε^2 nyolcadik primitív egységgyök, akkor mik $o(\overline{\varepsilon})$ lehetséges értékei?

16

15. Egy **homogén** lineáris egyenletrendszerben 3 egyenlet van és 5 ismeretlen. Amikor az elimináció véget ér, maximálisan hány nem nulla elem lehet a mátrixban?

9

16. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Adjunk meg egy olyan $B \neq 0$ mátrixot, melyre $BA = 0$.

Pl. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. A 4×4-es M mátrix determinánsa 2. Az M utolsó sorát és harmadik oszlopát elhagyva a kapott mátrix determinánsa 3. Az M^{-1} melyik elemét tudjuk ebből meghatározni, és az mennyi?

Az M^{-1} harmadik sorának negyedik eleme $-3/2$.

18. Adjunk ellenpéldát erre: „ha egy determináns nulla, akkor valamelyik sora egy másik sorának skalárszorosa, vagy valamelyik oszlopa egy másik oszlopának skalárszorosa.”

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

19. A $\det(M) = \det(M^T)$ bizonyításában az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ permutációt a g permutációnak feleltetjük meg. Mennyi $g(2)$?

1

20. Hány olyan permutáció van egy négyelemű halmazon, melyben az inverziók száma 5?

3

21. Egy hatodfokú valós együtthatós, normált polinom konstans tagja -5. Tudjuk, hogy van négyszeres gyöke. Hány valós gyöke lehet (multiplicitással számolva)?

    6

22. Adjunk meg $\mathbb{Z}_5$ fölött egy olyan hetedfokú polinomot, amelyhez tartozó polinomfüggvény azonosan 2.

    $2 + (x^5 - x)x^2$

23. Hány valós gyöke lehet az $x^4 + x^3 + 2x^2 + cx$ polinomnak (mutiplicitással számolva), ahol c valós?

    2

24. Mennyi a maradék, ha $\mathbb{Z}_5$ fölött az $x^{2015} + 1$ polinomot elosztjuk maradékosan $2x^2 + 2x + 1$-gyel?

    $3x + 4$

25. Mennyi $x^3 + 1$ és $x^4 - 1$ kitüntetett közös osztója?

    $x + 1$

26. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{R}$ fölött a Φ_{200} körosztási polinom?

    $\varphi(200)/2 = 40$

27. Adjunk példát, mely azt mutatja, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium nem marad érvényben, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy a főegyüttható nem osztható p-vel.

    Pl. $2x^2 - 2$

28. Bontsuk $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilisek szorzatára a $2x^4 + 10x^3 + 12x^2$ polinomot, és jelezzük azt is, hogy hány irreducibilis tényező van.

    $2x^2(x + 2)(x + 3)$, 5 tényező.

29. Milyen $n \geq 4$ számokra lesz a 3 invertálható $\mathbb{Z}_n$-ben?

    $(n, 3) = 1$ (azaz $3 \nmid n$).

30. Adjunk példát, amely mutatja, hogy $\mathbb{Z}_8[x]$-ben nem egyértelmű az irreducibilisekre bontás.

    $(x + 1)(x + 7) = (x + 3)(x + 5)$