Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi B (2014. december 8.) — eredmények és pontozás

1. Az M determinánsa (például az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel számolva) $2d-4$ (5 pont). Tehát M akkor invertálható, ha $d \neq 2$ (1 pont).

2. A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{15}(x) = \frac{x^{15}-1}{\Phi_1\Phi_3\Phi_5} = \frac{x^{15}-1}{(x^5-1)\Phi_3(x)} = \frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

(a nevezőben az 5 osztóit vontuk össze).

3. A racionális gyökteszttel számolva megállapítható, hogy az 1 szám kétszeres gyök, és a polinom $(x^6+2x^5+2)(x-1)^2$ (4 pont). A zárójelben lévő polinom a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt irreducibilis ($p=2$, 2 pont).

4. Az $x+i$ gyöktényezővel való osztási maradék az $f(-i)$ helyettesítési érték (2 pont). A feltétel szerint $f(x)=(x^2+1)q(x)+(x+1)$ (2 pont). Innen $x=-i$ helyettesítéssel $f(-i)=1-i$ (2 pont).

5. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $\sigma_1=a+b+c=1$, $\sigma_2=ab+ac+bc=2$ és $\sigma_3=abc=-1$ (1 pont). A keresett polinom $(x-a-bc)(x-b-ac)(x-c-ab)$, ezért a keresett szám $(a+bc)(b+ac)+(a+bc)(c+ab)+(b+ac)(c+ab)$ (1 pont). A beszorzást elvégezve

$$(ab+ac+bc)+(a^2bc+b^2ac+c^2ab)+(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$$

adódik (1 pont). Az utolsó hat tag összege $\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3=5$ (1 pont). Az előttük lévő három tag összege $\sigma_1\sigma_3=-1$ (1 pont). Ezért a végeredmény $2-1+5=6$ (1 pont).

6. Vonjuk ki az utolsó oszlopot a többiből, majd az első oszlopot az utolsóból. Ekkor olyan alsó háromszögmátrixot kapunk, amelynek a főátlójában mindenütt 1 áll, így a keresett determináns értéke 1.