Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi A (2014. december 8.) — eredmények és pontozás

1. Az M determinánsa (például az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel számolva) $-c+1$ (5 pont). Tehát M akkor invertálható, ha $c \neq 1$ (1 pont).

2. A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{24}(x) = \frac{x^{24}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}} = \frac{x^{24}-1}{(x^{12}-1)\Phi_8(x)} = \frac{x^{12}+1}{x^4+1} = x^8 - x^4 + 1$$

(a nevezőben a 12 osztóit vontuk össze).

3. A racionális gyökteszttel számolva megállapítható, hogy az 1 szám kétszeres gyök, és a polinom $(x^6+2)(x-1)^2$ (4 pont). A zárójelben lévő polinom a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt irreducibilis ($p=2$, 2 pont).

4. Az $x-i$ gyöktényezővel való osztási maradék az $f(i)$ helyettesítési érték (2 pont). A feltétel szerint $f(x) = (x^2+1)q(x) + (2x-1)$ (2 pont). Innen $x=i$ helyettesítéssel $f(i) = 2i-1$ (2 pont).

5. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $\sigma_1 = a+b+c = -2$, $\sigma_2 = ab+ac+bc = -1$ és $\sigma_3 = abc = -1$ (1 pont). A keresett polinom $(x-a-bc)(x-b-ac)(x-c-ab)$, ezért a keresett szám $-(a+bc)(b+ac)(c+ab)$ (1 pont). A beszorzást elvégezve

$$-\big(abc + a^2b^2c^2 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + (a^3bc + b^3ac + c^3ab)\big)$$

adódik (1 pont). Az utolsó három tag összege $abc(a^2+b^2+c^2) = \sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -6$ (1 pont). A gyakorlaton láttuk, hogy $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = -3$ (1 pont). Ezért a végeredmény $-(-1+1-3-6) = 9$ (1 pont).

6. Vonjuk ki az utolsó sort a többiből, majd mindegyik sort az utolsóból. Ekkor az egységmátrixot kapjuk, így a keresett determináns értéke 1.