Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2014. dec. 22.*

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $z = x + iy$, akkor mennyi $\left|\overline{z+i} + \mathrm{Im}(z-i)\right|^2$? (Feltesszük, hogy $x, y \in \mathbb{R}$.)

$(x+y-1)^2 + (y+1)^2$

12. Ha $|z| = 1$, akkor mennyi lehet $iz - i/z \neq 0$ szöge?

0 vagy 180°

13. Soroljuk föl $-1 - \sqrt{3}i$ azon ötödik gyökeit, melyek a második síknegyedbe esnek.

$\sqrt[5]{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

14. Ha ε hatodik primitív egységgyök, akkor mennyi $o(\overline{\varepsilon}^4)$?

3

15. Írjunk föl egy olyan **homogén** lineáris egyenletrendszert, amelynek végtelen sok megoldása van, az egyenletek száma 3, az ismeretlenek száma 2.

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

16. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz $B^T A$ egy 2×2-es mátrix?

$m = k$ és $n = \ell = 2$.

17. Az M mátrix előjeles aldeterminánsai M_{ij}, inverze N. Mi lesz $K = ((M_{ij}))$ és N kapcsolata?

$K = \det(M) N^T$

18. Az $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ determinánsát valaki úgy számolta ki, hogy M minden elemét megszorozta a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és összeadta. Mely M mátrixok esetében kapott helyes eredményt?

Ha $\det(M) = 0$.

19. Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$, melyre $\det(A) = 3$ és $\det(B) = 5i$. Határozzuk meg $\det(2AB^{-2})$ értékét.

$-96/25$

20. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determinánsban mi lesz az $a_{44}a_{32}a_{51}a_{23}a_{15}$ tag előjele?

$+1$

21. Egy tizedfokú valós együtthatós polinomnak minden gyöke kétszeres. Hány olyan különböző gyöke lehet, amelynek a képzetes része negatív?

    0, 1 vagy 2.

22. Mely $n \geq 4$ egészekre igaz a következő állítás? „Ha $f \in \mathbb{Z}_n[x]$-nek gyöke 1 és 3, akkor f osztható $(x-1)(x-3)$-mal $\mathbb{Z}_n[x]$-ben.”

    Ha $n(\geq 4)$ páratlan szám.

23. Határozzuk meg a 27-edik primitív egységgyökök négyzetösszegét.

    0

24. Mennyi a maradék, ha $\mathbb{Z}_5$ fölött az $x^{2015}+2x+1$ polinomot elosztjuk maradékosan x^2+1-gyel?

    $x+1$

25. Melyik a legkisebb $n \geq 0$, melyre hamis a következő: „ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött is”? Adjunk erre az n-re ellenpélda-polinomot is.

    $n = 0$, $f(x) = 2$.

26. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „Ha R szokásos gyűrű, akkor $R[x]$ minden elsőfokú polinomja irreducibilis R fölött.” A gyűrűt is meg kell adni.

    Pl. $2x$, $R = \mathbb{Z}$.

27. Legyen $f(x) = 60x^6 + 18x + 45$. Hogyan alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium annak megmutatására, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?

    $(1/3)f(x)$-re alkalmazható $p = 3$-mal, mert $f(x)$ irreducibilis $\iff$ $(1/3)f(x)$ az.

28. Adjunk példát olyan 2014-ed fokú egész együtthatós polinomra, amely $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

    $2x^{2014} + 6$

29. Adjunk példát $\mathbb{Z}_8$ fölött két másodfokú polinomra, melyek szorzata elsőfokú.

    $(4x^2+2x)(4x^2+2)$

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_7$ fölött irreducibilisek szorzatára a $\Phi_6(x)$ körosztási polinomot.

    $x^2 - x + 1 = (x+2)(x+4)$