Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi B (2014. október 20.) — eredmények és pontozás

1. A racionális gyökteszttel számolva a lehetőségek ± 1, $\pm 1/3$, $\pm 1/9$ és $\pm 1/27$ (1 pont). Hornerrel a gyöktényezőket mindig kiemelve az eredmény $(3x-1)^3(x+1)$ (3 pont). Ezért az $1/3$ multiplicitása 3 (1 pont), a -1 multiplicitása 1 (1 pont).

2. a) A képlet szerint az eredmény $204/360 = 17/30$ nevezője, azaz 30 (2 pont). **b)** Jelölje a v vektort $(x, y, z)^T$, homogén lineáris egyenletrendszert kapunk az x, y, z ismeretlenekre. Az általános megoldás Gauss-eliminációval $(x, y, z) = (-2y, y, 3y)$ (3 pont). Mivel mindhárom komponens egész, ezért y is egész. Ekkor bármely két komponens legnagyobb közös osztója y, tehát $y = \pm 1$ lesz megfelelő. Azaz a két megoldás $(-2, 1, 3)$ és $(2, -1, -3)$ (1 pont).

3. A $z = x + iy$ helyettesítés után négyzetre emelve $(x+2)^2 + y^2 \leq 4(x-1)^2 + 4y^2$ adódik (4 pont). Átrendezve $(x-2)^2 + y^2 \geq 4$, vagyis az eredmény a 2 körüli 2 sugarú körvonal, és az azon kívüli pontok (2 pont).

4. Legyen $x = z^3$, erre másodfokú egyenletet kapunk, aminek megoldásai a megoldóképlettel, a gyökvonást a szokásos módon elvégezve -1 és $1 - i$ (4 pont). Ezért z értékei -1, $\cos 60° + i \sin 60°$, $\cos 300° + i \sin 300°$, $\sqrt[6]{2}(\cos 105° + i \sin 105°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 345° + i \sin 345°)$ (2 pont).

5. Mivel f harmadfokú és a 0 kétszeres gyök, ezért $f(x) = ax^3 + bx^2$, ahol $a, b \neq 0$ (2 pont). Az $ax^3 + bx^2 + 1$ polinomnak gyöke a -1, azaz $-a + b + 1 = 0$. A gyöktényezőt például Hornerrel kiemelve $(x-1)(ax^2 - x + 1)$ adódik (2 pont). Mivel a -1 kétszeres gyök, ezért $a + 2 = 0$, azaz $a = -2$, $b = -3$ és $f(x) = -2x^3 - 3x^2$ (2 pont).

6. Ha az n szám megfelel a feltételnek, akkor, mivel az 1 biztosan n-edik egységgyök, ezért $(-1) \cdot 1$-nek is n-edik egységgyöknek kell lennie, tehát $(-1)^n = 1$. Ezért az n páros (3 pont). Megfordítva, ha $2 \mid n$, akkor $(-1)^n = 1$, tehát ha $\varepsilon^n = 1$, akkor $(-\varepsilon)^n = (-1)^n \varepsilon^n = 1$, ezért $-\varepsilon$ is n-edik egységgyök (3 pont). Tehát pont a páros n számok felelnek meg. *Második megoldás:* A -1-gyel való szorzás $180°$-os forgatás az origó körül. Tehát az a kérdés, hogy ha egy szabályos n-szöget elforgatunk $180°$-kal a középpontja körül, akkor mikor megy önmagába. Nyilván akkor, ha a középpontnál lévő szög, ami $360°/n$, osztója a $180°$-nak. Ez pedig pontosan $2 \mid n$ esetén teljesül.