Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi A (2014. október 20.) — eredmények és pontozás

1. A racionális gyökteszttel számolva a lehetőségek ± 1, $\pm 1/2$ és $\pm 1/4$ (1 pont). Pozitív gyök nem lehet, Hornerrel a gyöktényezőket mindig kiemelve az eredmény $(2x+1)^2(x^2-x+1)$ (2 pont). Az x^2-x+1 gyökei $(1 \pm i\sqrt{3})/2$, ezek egyszeresek (2 pont). A $-1/2$ multiplicitása 2 (1 pont).

2. **a)** A képlet szerint az eredmény $234/360 = 13/20$ nevezője, azaz 20 (2 pont). **b)** Jelölje a v vektort $(x, y, z)^T$, homogén lineáris egyenletrendszert kapunk az x, y, z ismeretlenekre. Az általános megoldás Gauss-eliminációval $(x, y, z) = (-z, 2z, z)$ (3 pont). Mivel mindhárom komponens egész, ezért z is egész. Ekkor bármely két komponens legnagyobb közös osztója z, tehát $z = \pm 1$ lesz megfelelő. Azaz a két megoldás $(-1, 2, 1)$ és $(1, -2, -1)$ (1 pont).

3. A $z = x + iy$ helyettesítés után négyzetre emelve $x^2 + (y-2)^2 \leq 4x^2 + 4(y+1)^2$ adódik (4 pont). Átrendezve $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$, vagyis az eredmény a $-2i$ körüli 2 sugarú körvonal, és az azon kívüli pontok (2 pont).

4. Legyen $x = z^3$, erre másodfokú egyenletet kapunk, aminek megoldásai a megoldóképlettel, a gyökvonást a szokásos módon elvégezve 1 és $-1-i$ (4 pont). Ezért z értékei 1, $\cos 120° + i \sin 120°$, $\cos 240° + i \sin 240°$, $\sqrt[6]{2}(\cos 75° + i \sin 75°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 195° + i \sin 195°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$ (2 pont).

5. Mivel f harmadfokú és a 0 kétszeres gyök, ezért $f(x) = ax^3 + bx^2$, ahol $a, b \neq 0$ (2 pont). Az $ax^3 + bx^2 + 1$ polinomnak gyöke az 1, azaz $a + b + 1 = 0$. A gyöktényezőt például Hornerrel kiemelve $(x-1)(ax^2 - x - 1)$ adódik (2 pont). Mivel az 1 kétszeres gyök, ezért $a - 2 = 0$, azaz $a = 2$, $b = -3$ és $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ (2 pont).

6. Ha az n szám megfelel a feltételnek, akkor, mivel az 1 biztosan n-edik egységgyök, ezért $i \cdot 1$-nek is n-edik egységgyöknek kell lennie, tehát $i^n = 1$. Ezért az n jó kitevője i-nek, így $o(i) = 4$ miatt $4 \mid n$ (3 pont). Megfordítva, ha $4 \mid n$, akkor $i^n = 1$, tehát ha $\varepsilon^n = 1$, akkor $(i\varepsilon)^n = i^n \varepsilon^n = 1$, ezért $i\varepsilon$ is n-edik egységgyök (3 pont). Tehát pont a 4-gyel osztható n számok felelnek meg. *Második megoldás:* Az i-vel való szorzás 90°-os forgatás az origó körül. Tehát az a kérdés, hogy ha egy szabályos n-szöget elforgatunk 90°-kal a középpontja körül, akkor mikor megy önmagába. Nyilván akkor, ha a középpontnál lévő szög, ami $360°/n$, osztója a 90°-nak. Ez pedig pontosan $4 \mid n$ esetén teljesül.