

Bsc algebra1 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2014. december 2–5)

- (3.9.4, 3.9.11)** Számítsuk ki Φ_{12} -t és a prímszámú Φ_n -ek körosztási polinomokat.
- (1.1.8, 1.1.9)** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2 : 3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani \mathbb{Z}_5 minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?
- (3.3.21)** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat \mathbb{Z}_2 felett.
- (3.9.22)** Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 és \mathbb{Z}_5 felett.
- (3.5.9)** Az $x^4 + x^2 + x + 1$ -et \mathbb{Z}_2 felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis \mathbb{Q} felett.

Gyakorló feladatok

- (3.9.18)** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával a 12-edik, a 18-adik illetve a 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.
 - (3.9.12)** Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.
 - (3.9.15*)** Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m -et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.
 - (3.9.16)** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$ -et, ha $n = 36, 72, 144, 100$.
-
- Hány nullosztó van \mathbb{Z}_4 -ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$ -ben?
 - Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $(3x + 1)f(x)$ foka 2.
 - Adjunk példát, ami mutatja, hogy \mathbb{Z}_6 fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.
 - Hány olyan legfeljebb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben, mely minden helyen 1?
 - Bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött gyöktényezőss alakra az $x^8 + 1$ polinomot.
 - Végezzük el az $(x^6 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$ maradékos osztást \mathbb{Z}_2 fölött.
 - Bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + x^5 + x^2 + 1$ polinomot.

17. (2.2.35) Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?

- $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
- $\mathbb{G} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*).
- $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
- $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
- A páratlan, illetve a 2-hatvány nevezőjű törtek \mathbb{Q} műveleteire nézve.
- Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

18. (2.2.4, 2.2.7) Igazoljuk, hogy a kompozíció asszociatív. Mi az egységelem? Adjunk példát két geometriai transzformációra, ami mutatja, hogy a kompozíció nem kommutatív.

19. (2.2.20) Igazoljuk az $a^m a^n = a^{m+n}$ és az $(a^m)^n = a^{mn}$ azonosságokat tetszőleges egységelemes gyűrű a invertálható elemére (m és n egészek, de lehetnek negatívak is).

20. (2.2.32) Határozzuk meg a \mathbb{Z}_m gyűrűben a nullosztókat és az invertálható elemeket.