Bsc algebra1 gyakorlat

Negyedik feladatsor (2014. szept. 30 – okt. 3)

1. ***(1.4.9)*** Rajzoljuk le a komplex síkon a következő halmazokat: $\{z : \mathrm{Re}(z + 2i) \leq -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z + 1) \geq \mathrm{Im}(z - 3i)\}$, $\{z : |z - i - 1| \leq 3\}$, $\{z : |z - 3 + 2i| = |z + 4 - i|\}$, $\{z : z + \overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z + 5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z) + 8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$.

2. ***(1.5.22)*** Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.

3. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1 + i$, $(1 + i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

4. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

5. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

6. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

7. ***(2.5.12)*** Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú polinom n helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők. Írjuk fel $x^n - 1$ gyöktényezős alakját.

8. ***(2.5.15*)*** Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

---

9. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

10. ***(1.5.21)*** Igazoljuk, hogy ha az n-edik primitív egységgyököket végigszorozzuk az m-edik primitív egységgyökök mindegyikével, akkor az mn-edik primitív egységgyököket kapjuk, mindegyiket pontosan egyszer. Vezessük le ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.

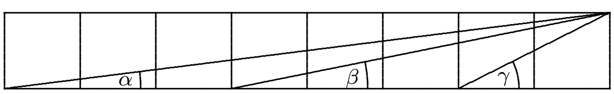
11. Mutassuk meg komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege (és fogalmazzuk is meg az ehhez tartozó azonosságot).

12. ***(1.4.11)*** Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.

13. ***(1.4.13*)*** Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

14. ***(*)*** Egy medvesajtos dobozban a hat (60°-os) körcikkből három maradt, amik elmozdulhattak, de úgy, hogy csúcsuk továbbra is a doboz középpontjában van, a három A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ív pedig a doboz szélére illeszkedik ebben a sorrendben. Igazoljuk, hogy a B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 szakaszok (tehát nem az ívek!) felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

15. ***(*)*** Részlet egy négyzetrácsból. Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 45°$.



16. ***(*)*** Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok a komplex számsíkon, melyekre teljesül, hogy $(z - i)i/(z - 1)$ negatív valós szám?