**Mat-tanári szak, második évfolyam, második félév**

*Második zárthelyi — megoldási útmutató*

**1.** Ez a polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (például a racionális gyökteszt miatt), és ezért $\mathbb{Q}(\theta)$ harmadfokú $\mathbb{Q}$ felett (1 pont). Ezért az $\alpha$ számot $a + b\theta + c\theta^2$ alakban keressük, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Ekkor $(\theta + 1)(a + b\theta + c\theta^2) = 1$. A beszorzást elvégezve, és a $\theta^3 = \theta - 2$ összefüggést felhasználva $1 = (a - 2c) + (a + b + c)\theta + (b + c)\theta^2$ adódik. Az egyértelműség miatt a megfelelő együtthatók egyenlők. Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva $a = 0$, $b = 1/2$, $c = -1/2$, vagyis $\alpha = (\theta - \theta^2)/2$ (3 pont). Egy harmadfokú bővítésben az alaptest elemei elsőfokúak, a többi harmadfokú (mert 3-nak osztója). De $\alpha \notin \mathbb{Q}$ az előállítás egyértelműsége miatt (1 pont), és ezért $\alpha$ harmadfokú (1 pont).

**2.** Ha $x = \sqrt[4]{5 + \sqrt[3]{-2}}$, akkor először negyedik hatványra, majd átrendezés után köbre emelve azt kapjuk, hogy $x^{12} - 15x^8 + 75x^4 - 123 = 0$ (3 pont). Ez a polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett a Schönemann-Eisenstein kritérium miatt ($p = 3$), és ezért az eredeti szám foka 12.

**3.** A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $A + B = N$, vagyis $B = -A = 2A = 2x + (x^2 + 1)$ (2 pont). Az $A$ rendje az összeadásra 3, ugyanis ez az elem nem nulla (hiszen a nulla nem gyöke a polinomnak), vagyis rendje nem 1, viszont a háromszorosa már nulla, sőt $T$ minden elemének a háromszorosa nulla (1 pont). Mivel $A$ gyöke az $Ex^2 + E$ polinomnak, ezért $A^2 = -E$ (ez reprezentánsokkal való közvetlen számolással is látható). Tehát $A^4 = E$, vagyis $A$ rendje osztója a 4-nek (2 pont). De $A^2 = -E \neq E$ (hiszen a karakterisztika három, nem kettő), és ezért $A$ rendje nem osztója a 2-nek, és így csak 4 lehet (1 pont).

**4.** Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} + \sqrt[5]{5}\,\sqrt[3]{3}$ szerkeszthető. Mivel $\sqrt{2}$ szerkeszthető az egységszakaszból, továbbá hányadost is tudunk szerkeszteni, ezért $\sqrt[3]{3}$ is szerkeszthető (2 pont). Tehát $\sqrt[3]{3}$ foka 2-hatvány a $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$ fölött (1 pont). De $\sqrt[3]{3}$ foka $\mathbb{Q}$ felett 3, mert $x^3 - 3$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Hasonlóan $\sqrt[5]{5}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 5. Mivel 3 és 5 relatív prímek, $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \sqrt[3]{3})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 15. A szorzástétel miatt tehát $\sqrt[3]{3}$ foka 3 a $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$ fölött. Ez ellentmondás, tehát a szerkesztés nem végezhető el (3 pont).

**5.** A IX/4. feladat megoldásakor láttuk, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ testnek a nemtriviális résztestei $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Ezek egyikében sincs benne a $\beta = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, mert ebben a bővítésben bázist alkot az $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, tehát az ebben való felírás egyértelmű. Ezért $\beta$ az egész bővítést kell, hogy generálja, vagyis foka 4. A feladatot Galois-elmélet nélkül is meg lehet oldani, annak mintájára, ahogy tavaly megmutattuk, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gyöke egy negyedfokú irreducibilis polinomnak, de ez sokkal több számolással jár. Harmadik megoldásként kiszámolhatjuk, hogy $1, \beta, \beta^2$ lineárisan független rendszer $\mathbb{Q}$ fölött (és így $\beta$ foka osztója 4-nek, de legalább 3).

**6.** A 16 elemű test minden nem nulla eleme gyöke az $x^{15} - 1$ polinomnak a Lagrange-tétel miatt (hiszen a multiplikatív csoportja 15 elemű). Mivel a polinom maga is 15-ödfokú, ebben a testben lineáris tényezőkre bomlik. A gyökök tehát ezt a testet generálják $\mathbb{Z}_2$ fölött, és így a 16 elemű test felbontási test lesz (vö. XI/3. feladat). A felbontási test egyértelműsége miatt más test nem jön szóba.