Mat-tanári szak, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldási útmutató

1. A faktorcsoportban reprezentánsokkal kell számolni. De $(1,2)(2,2) = (3,4)$ (hiszen az első komponensben összeadni kell modulo 10, a másodikban szorozni mod 5). Ezért $C = (3,4)N = \{(3,4),(3,1),(8,4),(8,1)\}$ (3 pont). A $(3,4)$ elem ötödik hatványa $(5,4) \in N$, és ezért C^5 az egységelem. Tehát C rendje 1 vagy 5 lehet (hiszen 5 prím). De C nem az egységelem, mert $(3,4) \notin N$. Ezért C rendje 5 (3 pont).

2. A véges Abel-csoportok alaptételét alkalmazzuk. Mivel $72 = 2^3 \cdot 3^2$, ezért a 8-at és a 9-et kell prímhatványok szorzatára bontani. A lehetőségek $8 = 8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, illetve $9 = 9 = 3 \cdot 3$. A tétel egyértelműségi állítása miatt a kapott felbontások páronként nemizomorf csoportokat adnak, és így izomorfia erejéig $3 \cdot 2 = 6$ darab 72 elemű Abel-csoport van (3 pont). Tudjuk azt is, hogy a direkt szorzatban az elemek rendje a komponensek rendjeinek legkisebb közös többszöröse. Akkor lesz tehát 12 rendű elem, ha valamelyik tényezőben van negyedrendű, és egy másikban harmadrendű elem. Mivel $\mathbb{Z}_2^+$-ban nincs negyedrendű elem, de $\mathbb{Z}_4^+$-ban és $\mathbb{Z}_8^+$-ban van, továbbá $\mathbb{Z}_3^+$-ban is és $\mathbb{Z}_9^+$-ban is van harmadrendű elem, ezért a fenti csoportok közül azok esnek ki, amelyekben a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ szerepel. Ilyen kettő van, az eredmény tehát 4 (3 pont).

3. Jelölje a háromszög csúcsait A, B, C. Legyen az A csúcshoz ragasztott háromszög AA_1A_2. Ekkor A orbitja a keresett G szimmetriacsoportban éppen $\{A, B, C\}$, hiszen csak ezek a csúcsok negyedfokúak, ezekbe pedig a „forgatások" átviszik A-t. Ezért $|G| = 3|G_A|$ (1 pont). Ha A fixen marad, akkor B csak C-be mehet, és így $|G| = 6|H|$, ahol a $H = (G_A)_B$ részcsoport elemei már az A, B, C mindegyikét fixen hagyják (1 pont). Most nézzük H-ban az A_1 pont orbitját. Mivel A fixen marad, ez része $\{A_1, A_2\}$-nek, és A_1-et átviszi A_2-be az a szimmetria, ami A_1-et és A_2-t kicseréli, a többi 7 pontot fixen hagyja. Vagyis $|H| = 2|H_{A_1}|$ (2 pont). Hasonlóan járhatunk el a másik két csúcsnál is, ezért az eredmény $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ (2 pont).

4. Nincs. Ugyanis ha $g \in S_4$, melyre $g^4 = id$, akkor $\varphi(g)^4$ is az egységelem, és ez $\mathbb{Z}_3^+$-ban azt jelenti, hogy $\varphi(g) = 0$. Vagyis az ilyen g elemek benne vannak φ magjában. A hármasciklusok kivételével S_4 összes elemének negyedik hatványa az identitás, hármasciklusból viszont csak nyolc darab van. De φ magja $24/3 = 8$ elemű kellene, hogy legyen, ez ellentmondás (6 pont). Az állítás úgy is belátható, hogy megkeressük S_4 normálosztóit, amik között nem lesz nyolcelemű.

5. Az N a G konjugált osztályainak az egyesítése. Ezek elemszáma osztja G rendjét, és ezért páratlan. Az egységelem egy osztályt alkot, a maradék négy elem páratlan elemszámú osztályokba csak úgy sorolható, ha ezek között van egyelemű, mondjuk $\{g\}$ (3 pont). Ekkor $g \in Z(G) \cap N$. Ez a metszet részcsoportja N-nek, és elemszáma nagyobb, mint 1, tehát Lagrange tétele miatt csak 5 lehet, vagyis a metszet N-et tartalmazza (3 pont).

6. Mátrixokkal való számolással látható, hogy a vizsgált G részcsoport nemkommutatív (2 pont). Ezért a tanult tétel miatt vagy D_4-gyel, vagy a kvaterniócsoporttal izomorf (1 pont). Mivel könnyű találni két másodrendű elemet, csak a D_4-et kaphatjuk (3 pont).