Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

Legyen K egy szerkesztési feladat alapadatai által generált részteste $\mathbb{R}$-nek. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor szerkeszthető ezekből, ha van olyan $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$ testlánc, hogy $\alpha \in K_n$, és minden $K_i \subseteq K_{i+1}$ bővítés másodfokú. Belátható, hogy ekkor a K_i testek választhatók úgy is, hogy $K_n = K(\alpha)$ legyen. Ha α komplex szám, akkor ez a feltétel pontosan akkor igaz α-ra, ha valós és képzetes részére is igaz. Ezért egy komplex számot akkor mondunk szerkeszthetőnek, ha valós és képzetes része is szerkeszthető.

A fokszámtétel miatt szerkeszthető α esetén $|K(\alpha) : K|$ egy 2-hatvány. Ez szükséges, de nem elégséges feltétele a szerkeszthetőségnek. A szükséges és elégséges feltétel az, hogy α eleme legyen K egy 2-hatvány fokú **normális** bővítésének. Ezzel ekvivalens, hogy K-t az α minimálpolinomjának **összes** komplex gyökével bővítve 2-hatvány fokú bővítést kapjunk.

1. *Az alábbi szerkesztési feladatok mindegyikében határozzuk meg a K alaptestet, a $K(\alpha)$ bővítés fokát K felett, az α minimálpolinomja felbontási testének fokát K felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.*

a) Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
b) Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[4]{2}$.
c) Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[6]{2}$.
d) Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
e) Adott $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$, a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.
f) Adott egy szabályos 9-szög a síkon. Szerkesztendő egy szabályos 18-szög. Mi az α?

2. *Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Az egységszakaszból akarunk π hosszú szakaszt szerkeszteni. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a síkon adott egységszakasz két végpontja a $(0,\pi)$ és az $(1,\pi)$ pontokba kerüljön. Ekkor $K = \mathbb{Q}(0,1,\pi)$, amelynek a szerkesztendő szám eleme. Tehát ez a szerkesztés elvégezhető.*

3. *Szerkeszthető-e a háromszög, ha adott két oldalának és az egyikhez tartozó szögfelezőnek a hossza? Válaszoljunk az alábbiak megoldásával. Jelölje (a szokásos módon) az oldalakat a, b, c, a hozzájuk tartozó szögfelezőket f_a, f_b, f_c, a szemköztes szögeket α, β, γ.*

a) Mutassuk meg, hogy $f_a = (2bc\cos(\alpha/2))/(b+c)$.
b) Mutassuk meg, hogy $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$.
c) Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megadott adatok értéke $a = 1$, $b = 1$, $f_a = 1$. Ha ez nem szerkeszthető, mi a helyzet az általános feladattal?
d) Fejezzük ki ebben az esetben $\cos\alpha$-t az oldalak segítségével.
e) A c-re kapott egyenletből milyen érték adódik c fokára $\mathbb{Q}$ felett?

4. *Mutassuk meg, hogy nem szerkeszthető egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából.*

5****.** *Igazoljuk, hogy ha az $x^4 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, akkor az alábbiak ekvivalensek.*

(1) Az egyenlet valamelyik gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.
(2) Az egyenlet összes gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.
(3) A $8x^3 - 4ax^2 - 8cx + (4ac - b^2)$ polinomnak van racionális gyöke.