Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Hetedik alkalom — megoldásvázlatok

1. Az ilyen alakú számok a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ testet alkotják. A $\sqrt[3]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ felett három, mert $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomja x^3-2. Így $|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}|=3$. Tehát e bővítés minden elemének foka osztója háromnak. De a $\sqrt[6]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ felett 6, mert a Schönemann-Eisenstein kritérium miatt az x^6-2 polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Tehát sem ez a szám, sem a másodfokú $\sqrt{2}$ nem írható fel a kívánt alakban. Jegyezzük meg, hogy sok harmadfokú szám van, ami szintén nem írható fel ilyen alakban, ilyen például az x^3-2 polinom két nem valós gyöke.

3. Tekintsük a $K \le K(\alpha) \le K(\alpha)(\beta) = M$ testláncot. Az első bővítés foka $gr_K(\alpha)$. A második bővítés fokának meghatározásához meg kell vizsgálnunk a β minimálpolinomját $K(\alpha)$ felett. Ha a K feletti minimálpolinomot m jelöli, akkor m foka $gr_K(\beta)$. Az m polinom $K[x]$-beli, és így minden együtthatója benne van a $K(\alpha)$ testben. A $K(\alpha)$ feletti minimálpolinom azonban osztója minden olyan $K(\alpha)[x]$-beli polinomnak, aminek β gyöke, tehát speciálisan m-nek is. Ezért a foka, azaz β foka $K(\alpha)$ felett legfeljebb annyi, mint m foka, azaz $gr_K(\beta)$. Így a fenti testláncból azt kapjuk, hogy $|M:K| \le gr_K(\alpha)gr_K(\beta)$. Másrészt viszont α és β K feletti foka osztja $|M:K|$-t, és mivel e két szám relatív prím, a szorzatuk is osztja. Vagyis beláttuk, hogy $|M:K| = gr_K(\alpha)gr_K(\beta)$. (A fenti lánc alapján ebből azt is láthatjuk, hogy β foka $K(\alpha)$ felett $gr_K(\beta)$, és ezért a fenti m polinom a $K(\alpha)$ feletti minimálpolinom is egyben.)

2. Nyilván $K(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}) \subseteq K(\sqrt[6]{2})$, hiszen $\sqrt{2}$ is és $\sqrt[3]{2}$ is hatványa $\sqrt[6]{2}$-nek. A 3. feladat alapján mindkét bővítés hatodfokú, és ezért a két bővítés megegyezik. A fokszámra való hivatkozás helyettesíthető lenne közvetlen számolással, mert $\sqrt[6]{2}$ is könnyen kifejezhető $\sqrt{2}$-vel és $\sqrt[3]{2}$-vel.

4. Tekintsük a $\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\sqrt{8}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \le \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ láncot. Tudjuk, hogy a nagy bővítés foka 4, a kicsié 2, ezért $|\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{8})| = 2$. Így a keresett fokszám kettő. (Be lehet látni, hogy a $\sqrt[4]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ felett $x^2-\sqrt{2}$, de erre nincsen szükség.) A másik kérdéshez tekintsük a $\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) \le \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7},\sqrt[4]{2})$ láncot. A 3. feladat miatt itt a nagy bővítés foka 12, és a kicsié 3, ezért az eredmény 4.

5. Legyen ε primitív harmadik egységgyök, melyre $\theta = \varepsilon\sqrt[3]{2}$. Mivel θ minimálpolinomja is x^3-2, a θ foka $\mathbb{Q}$ felett 3. Továbbá ε foka $\varphi(3)=2$ (a minimálpolinom a harmadik körosztási polinom, azaz x^2+x+1). Nyilván $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$, és így a 3. feladat miatt ez hatodfokú bővítése $\mathbb{Q}$-nak. Ezért θ másodfokú $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ felett (és ez nem osztja a θ fokát $\mathbb{Q}$ felett). A $\mathbb{Q}(\theta)\cap\mathbb{R}$ test részteste $\mathbb{Q}(\theta)$-nak, és így $\mathbb{Q}$ feletti foka 1 vagy 3 lehet. Utóbbi lehetetlen, mert θ nem valós. Ezért a metszet $\mathbb{Q}$.

6. Mivel i algebrai, ha a és b algebrai, akkor $a+bi$ is az, hiszen az algebrai számok testet alkotnak. Megfordítva, ha $a+bi$ algebrai, akkor gyöke egy racionális együtthatós nem nulla polinomnak. Ennek $a-bi$ is gyöke (hiszen a polinom valós együtthatós), de a és b kifejezhető $a+bi$-vel, $a-bi$-vel és i-vel.

7. Ha $a=\pi+3$ algebrai lenne, akkor $a-3=\pi$ is az lenne, hiszen az algebrai számok testet alkotnak, ami ellentmondás. Hasonlóan látható, hogy $5\pi+6$ és $\pi+\sqrt{2}$ sem lehet algebrai. Ha $\sqrt{\pi}$ algebrai lenne, akkor négyzete is, ez sem lehet. Végül belátjuk, hogy π semmilyen racionális együtthatós, nem nulla polinomja sem lehet algebrai. Ha ugyanis $g(\pi)$ algebrai lenne, azaz gyöke lenne egy racionális együtthatós $f \ne 0$ polinomnak, akkor $f(g(\pi))=0$, azaz π gyöke lenne a racionális együtthatós, nem nulla $f(g(x))$ polinomnak.

8. A lineáris kombinációk felírásával, és π transzcendens voltának kihasználásával kapjuk, hogy az első és a harmadik halmaz független. A második nem, mert $\mathbb{C}$ csak másodfokú $\mathbb{R}$ felett.

9. Algebrai plusz transzcendens mindig transzcendens. Nem nulla algebraiszor transzcendens is transzcendens. Algebrai szám n-edik hatványa és n-edik gyöke is algebrai, minden n egészre.

10. a): Ez a szám primitív 360-adik egységgyök, hiszen 23 és 360 relatív prímek. Ezért foka $\varphi(360)$. b): Legfeljebb hatodfokú, de négyzetre emeléssel kifejezhető a $\sqrt[3]{9}$, ezért az eredmény 6. c): Nyilván 2. d): Négyzetre emeléssel kifejezhető a $\sqrt{2}$, az eredmény 4.

11. A $\mathbb{Q}$ minden algebrailag zárt bővítése tartalmazza az n-edfokú $\sqrt[n]{2}$ számot minden n-re, és így foka végtelen. Ha K véges test, és elemei $\{a_1,\dots,a_n\}$, akkor az $f(x)=(x-a_1)\dots(x-a_n)+1$ nem-konstans polinomnak nincs gyöke K-ban, ezért K nem lehet algebrailag zárt. A $\mathbb{Z}_p$ test esetében vehetnénk ehelyett az x^2-g polinomot, ahol g kvadratikus nemmaradék.