Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hetedik alkalom

Ha $K \leq L$ egy testbővítés, akkor $|L : K|$ jelöli ennek a bővítésnek a fokát, vagyis az L-nek, mint K feletti algebrának a dimenzióját. A szorzástétel szerint ha $K \leq L \leq M$, akkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$. Tudjuk továbbá, hogy ha α algebrai K felett, akkor $|K(\alpha) : K| = gr_K(\alpha)$, ahol $gr_K(\alpha)$ az α foka K felett, azaz K feletti minimálpolinomjának foka. Ezért ha $\alpha \in L$, akkor $gr_K(\alpha)$ osztja $|L : K|$-t. Beláttuk azt is, hogy $\alpha \pm \beta$ és $\alpha\beta$ foka legfeljebb akkora lehet, mint α és β fokainak szorzata. Ezeknek az állításoknak a segítségével rengeteg számolás kerülhető el, ha egy bővítés fokát akarjuk meghatározni.

1. *Felírható-e* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban a* $\sqrt[6]{2}$ *illetve a* $\sqrt{2}$*, ahol* a, b, c *racionális számok?*

2. *Határozzuk meg* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}|$ *értékét, és bizonyítsuk be, hogy* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.

3. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L$ *egy testbővítés,* $\alpha, \beta \in L$*, és* $gr_K(\alpha)$ *és* $gr_K(\beta)$ *relatív prímek, akkor* $|K(\alpha, \beta) : K| = gr_K(\alpha)gr_K(\beta)$.

4. *Határozzuk meg* $\sqrt[4]{2}$ *fokát a* $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ *és a* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ *felett.*

5. *Legyen* θ *nem valós gyöke az* $x^3 - 2$ *polinomnak. Határozzuk meg* θ *fokát* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *felett, és a* $\mathbb{Q}(\theta) \cap \mathbb{R}$ *testet. Igaz-e, hogy ha* $K \leq L \leq M$*, és* $\alpha \in M$*, akkor* $gr_L(\alpha) \mid gr_K(\alpha)$*?*

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha* a *és* b *valós, akkor* $a + bi$ *pontosan akkor algebrai (*$\mathbb{Q}$ *felett), ha* a *is és* b *is az. A bizonyításban használjuk fel, hogy az algebrai számok testet alkotnak.*

7. *Az alábbi számok közül melyek algebraiak, és melyek transzcendensek:* $\pi + 3$, $5\pi + 6$, $\pi + \sqrt{2}$, $\pi^2 + 2\pi + 2$, $\sqrt{\pi}$.

További feladatok

8. *Lineárisan független-e* $\{1, i, \sqrt{2} + 3i\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett;* $\{1, i, \sqrt{2} + 3i\}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett;* $\{1, \pi, 1/\pi\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett?*

9. *Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?*

10. *Számítsuk ki az alábbi fokszámokat: a)* $|\mathbb{Q}(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) : \mathbb{Q}|$*; b)* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}|$*; c)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *felett; d)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *felett.*

11. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}$ *egyetlen véges bővítése sem lehet algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy a* $\mathbb{Z}_p$ *test nem algebrailag zárt. Melyek az algebrailag zárt véges testek?*

12. *Legyen* K *részteste* $\mathbb{C}$*-nek, és* b*,* c *racionális számok. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in K(\sqrt{c})$*. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $\sqrt{b} \in K$*, vagy* $\sqrt{b/c} \in K$.

13. *Legyen* b *négyzetmentes racionális szám (azaz két négyzetmentes egész hányadosa), és* $p_1, \ldots, p_n$ *prímek. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}_1, \ldots, \sqrt{p}_n)$*. Bizonyítsuk be, hogy* b *kanonikus alakjában csak* $p_1, \ldots, p_n$ *szerepelhet. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a prímszámok négyzetgyökei lineárisan függetlenek* $\mathbb{Q}$ *felett. (Egy végtelen halmaz akkor lineárisan független, ha minden véges részhalmaza az.)*