Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Hatodik alkalom — megoldásvázlatok

1. Átszorozva, és a $\sqrt[3]{2}$ hatványai szerint rendezve $1 = (1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}) = (a+2b+2c) + (a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+b+c)\sqrt[3]{4}$. Az 1 ilyen alakú felírása egyértelmű, és ezért $a+2b+2c=1$, $a+b+2c=0$, $a+b+c=0$. Az egyenletrendszert megoldva az eredmény $\sqrt[3]{2}-1$. (Ezt számolás nélkül is leolvashattuk volna az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságból. De a fenti módszer általános, minden esetben működik.)

2. Azt tudjuk, hogy $\theta^3+3\theta+1=0$. Innen $\theta^5+3\theta^3+\theta^2=0$. Ebből ki lehet fejezni θ^5-t, és így $\theta^5+2\theta^3=-3\theta^3-\theta^2+2\theta^3=-\theta^3-\theta^2=-\theta^2+3\theta+1$. Látható, hogy θ valamennyi polinomja redukálható legfeljebb másodfokúvá úgy, hogy a legmagasabb fokú tagot mindig alacsonyabb fokúval helyettesítjük.

A $\theta/(\theta-3)$ kiszámítása az előbbi feladathoz hasonló: az eredményt $a+b\theta+c\theta^2$ alakban keressük, keresztbe szorzunk, nullára redukálunk, a θ kapott polinomját redukáljuk legfeljebb másodfokúvá, majd az együtthatókat nullává tesszük, és a kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk a, b, c-re. Az eredmény: $\theta/(\theta-3)=(1/37)-(9/37)\theta-(3/37)\theta^2$. (Számítógéppel közelítőleg ellenőrizhető az eredmény, $\theta\approx -0,322185$.)

3. A π transzcendens, nincs minimálpolinomja. Az $1+i$-hez olyan polinomot kell keresni, melynek ez gyöke. Ehhez legyen $1+i=x$, ekkor $i=x-1$, négyzetre emelve és rendezve $x^2-2x-2=0$. Ennek a polinomnak tehát gyöke az $1+i$, és ez akkor lesz a minimálpolinom, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ez látszik abból, hogy másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

Ha $x=\sqrt{2}+i$, akkor $(x-i)^2=2$, azaz $x^2-3=2ix$, még egyszer négyzetre emelve és rendezve x^4+2x^2+9. E polinom irreducibilitása ugyanúgy látható be, mint az x^4+9 polinomé a második félévben: $\mathbb{C}$ felett kell először felbontani.

Láthatjuk, hogy ezzel a technikával az összetett gyökös kifejezésekhez tudunk olyan polinomot találni, aminek az gyöke, ha a megfelelő átrendezések után mindig hatványozunk. Ennek alapján $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomja x^4-10x^2+1 (irreducibilitását a második félévben beláttuk), $\sqrt[3]{2}$-é x^3-2, $1+\sqrt[3]{2}$-é $(x-1)^3-2$ (ami x^3-2 eltoltja, ezért irreducibilis), $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$-é pedig x^6-4x^3+2, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis.

Ha $u=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $v=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, és $x=u+v$, akkor vaktában elindulva egy nagyon nagy fokú polinom keletkezne. Köbre emelve $x^3=14+3uv(u+v)$. De $uv=\sqrt[3]{49-50}=-1$ és $u+v=x$, ezért $x^3+3x-14=0$ is igaz. De ez még mindig nem a minimálpolinom, hiszen gyöke a kettő. Mivel ez az egyetlen valós gyök (ami például az $x-2$ kiemelésével adódik), és a fenti kifejezés is valós, ezért a fenti kifejezés értéke valójában kettő, minimálpolinomja $x-2$.

A $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ azonosságból kapjuk, hogy $\cos 20^\circ$ minimálpolinomja $x^3-(3/4)x-(1/8)$ (ez a racionális gyökteszt miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett). Végül az n-edik primitív egységgyökök közös minimálpolinomja az n-edik körosztási polinom, hiszen ez irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és normált.

4. Belátjuk, hogy $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jó. Nyilván ez eleme $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$-nak, kérdés, hogy $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ kifejezhető-e c-vel és racionális számokkal. Mivel $c^2=5+2\sqrt{6}$, ezért $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}(c)$. Továbbá $c^3=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{6}c$, ezért innen $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(c)$. De ezzel és $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$-mal nyilván kifejezhető a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$.

5. $\alpha,\beta\in K(\alpha,\beta)$, és mivel ez test, tartalmazza $\alpha\beta$-t is. Ezért $K(\alpha,\alpha\beta)\subseteq K(\alpha,\beta)$. Megfordítva, mivel $\alpha\neq 0$, a β, ami $\alpha\beta$ és α hányadosa, benne van a $K(\alpha,\alpha\beta)$ testben. Mivel α is benne van, ezért $K(\alpha,\alpha\beta)\supseteq K(\alpha,\beta)$.

6. Az $f(\alpha)/g(\alpha)$ alakú törtek zártak a négy alapműveletre (összeadás és kivonás esetében ez közös nevezőre hozással látható be). Tehát testet kaptunk, ami tartalmazza α-t (legyen $f(x)=x$, és $g(x)=1$), valamint K elemeit is (legyen f konstans, $g=1$). Annak belátásához, hogy ez a legszűkebb K-t és α-t tartalmazó résztest, vegyük észre, hogy az L minden olyan részteste, ami K-t és α-t tartalmazza, nyilván tartalmazza az $f(\alpha)/g(\alpha)$ elemet is, hiszen ez K elemeiből és α-ból a négy alapművelettel kapható.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $f(\alpha)/g(\alpha)=h(\alpha)/k(\alpha)$, ahol $(f,g)=1=(h,k)$, és g,k normált. Átszorzással $f(\alpha)k(\alpha)-h(\alpha)g(\alpha)=0$. Mivel α transzcendens, csak a nullapolinomnak gyöke, és így $fk-hg=0$. De $K[x]$ alaptételes gyűrű, és ezért $fk=hg$, valamint $(f,g)=1$-ből következik, hogy $g\mid k$. Hasonlóan adódik $(h,k)=1$ felhasználásával, hogy $k\mid g$. Ezért g és k asszociáltak, $g=ck$ alkalmas $0\neq c\in K$-ra. Mivel mindkettő normált, $c=1$. Ekkor viszont $f=h$ is teljesül.