Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

Egy $\alpha \in \mathbb{C}$ szám $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomja az a normált $m_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, mely minden olyan racionális együtthatós polinomnak osztója, melynek α gyöke. Ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és gyöke az α, akkor $f = m_\alpha$. **Ismétlés:** Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:

- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.

1. *Írjuk fel az* $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ *szám reciprokát* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban (ahol* a, b, c *racionális számok).*

2. *Legyen* θ *az* $x^3 + 3x + 1$ *polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a* $\theta^5 + 2\theta^3$ *és a* $\theta/(\theta - 3)$ *számokat kanonikus alakban (azaz* $a + b\theta + c\theta^2$ *alakban, ahol* a, b, c *racionális számok).*

3. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test felett:* π, $1 + i$, $\sqrt{2} + i$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1 + \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, *tetszőleges primitív* n*-edik egységgyök.*

4. *Adjunk meg egy olyan* c *számot, melyre* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(c)$.

Legyen K részteste az L testnek, és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Ekkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ az L legszűkebb olyan részteste, amely K-t és az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elemeket tartalmazza, azaz a K és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ által **generált** résztest. Ennek a definíciónak az alapján részletesen belátjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in L$, akkor $K(\alpha)(\beta) = K(\alpha, \beta)$. Megmutatjuk, hogy mindkét oldal tartalmazza a másikat. A $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza a β elemet, és a $K(\alpha)$ testet. A $K(\alpha)$ test tartalmazza az α elemet, és a K testet. Ezért $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza K-t is, és az α, β elemeket is. Mivel $K(\alpha, \beta)$ a legszűkebb az ilyen tulajdonságú testek közül, azért $K(\alpha, \beta) \subseteq K(\alpha)(\beta)$. A másik tartalmazás belátásához vizsgáljuk a $K(\alpha, \beta)$ testet. Ez tartalmazza az α elemet, és a K testet, és mivel $K(\alpha)$ a legszűkebb ilyen test, $K(\alpha) \subseteq K(\alpha, \beta)$. De $K(\alpha, \beta)$ tartalmazza a β elemet is, és így a legszűkebb olyan testet is, ami a β elemet és a $K(\alpha)$ testet tartalmazza, ami definíció szerint $K(\alpha)(\beta)$.

5. *A fenti bizonyítás módszerével igazoljuk, hogy ha* $\alpha \neq 0$, *akkor* $K(\alpha, \beta) = K(\alpha, \alpha\beta)$.

6. *Tegyük fel, hogy* $K \leq L$ *testbővítés, és* $\alpha \in L$. *Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $K(\alpha) = \{f(\alpha)/g(\alpha) \mid f, g \in K[x],\ g(\alpha) \neq 0\}$, *és ha* α *transzcendens* K *felett, akkor ez az előállítás egyértelmű (feltéve, hogy az* $f(x)/g(x)$ *már egyszerűsített alakban van felírva, azaz* f *és* g *relatív prím polinomok, és* g *normált, hogy konstanssal se lehessen egyszerűsíteni).*