Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Ötödik alkalom — megoldásvázlatok

1. Olyan A és B normálosztókat keresünk, melyekre $A \cap B = \{e\}$, $AB = G$. Ha G ciklikus, akkor minden részcsoportja egy elemmel generálható, és így könnyű megkapni az összes részcsoportot, amik mind normálosztók (mert minden ciklikus csoport kommutatív). Ennek alapján $\mathbb{Z}_6^+$-nak négy részcsoportja van, és $\mathbb{Z}_6^+$ a $\{0, 2, 4\}$ és $\{0, 3\}$ normálosztók direkt szorzata, vagyis $\mathbb{Z}_6^+ \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$. A $\mathbb{Z}_8^+$ csoportnak is négy részcsoportja van, de nincs nemtriviális direkt felbontása. A $\mathbb{Z}^+$ csoportnak sincsen, mert ha $a, b \neq 0$ egészek, akkor $ab \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, és így e metszet nem lehet $\{0\}$. Ugyanígy $\mathbb{Q}^+$ is direkt felbonthatatlan: ha $p/q \in A$ és $r/s \in B$, akkor $pr \in A \cap B$. A $\mathbb{C}^+$ csoportnak viszont sok direkt felbontása van, például bármely két különböző, origón átmenő egyenesnek direkt összege.

Tudjuk, hogy ha $(m, n) = 1$, akkor $\mathbb{Z}_{mn}^\times \cong \mathbb{Z}_m^\times \times \mathbb{Z}_n^\times$. Ennek alapján $\mathbb{Z}_{15}^\times$ felbontható. A $\mathbb{Z}_{16}^\times$ csoport a $\{1, 15\}$ és $\{1, 3, 9, 11\}$ normálosztók direkt szorzata (amelyek ciklikusak, és így $\mathbb{Z}_{16}^\times \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$). A D_3, D_4, Q, A_4 csoportoknak a múltkori feladatsoron kiszámoltuk a normálosztóit, és ebből látszik, hogy mindegyik direkt felbonthatatlan, mint S_5 is, melyben kiszámolható, hogy egyetlen valódi normálosztója A_5.

2. Az előadáson tanultak szerint (g, h) rendje g és h rendjeinek legkisebb közös többszöröse. Ez az alábbi párokra lesz 4: $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$.

3. Minden Abel-csoport prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzata. Hányféleképpen bontható fel például a 48 prímhatványok szorzatára? A 3 mindig szerepel. A 16 felbontásait a legnagyobb benne szereplő szám szerint csoportosíthatjuk. Ha ez 16, akkor a felbontás egytényezős. Ha 8, akkor csak $8 \cdot 2$ lehet. Ha 4, akkor $4 \cdot 4$ és $4 \cdot 2 \cdot 2$ adódik, ha 2, akkor csak $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Összesen tehát 5 lehetőség van. A kapott öt csoport az alaptétel egyértelműségi állítása miatt egymással páronként nem izomorf. Például $\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és $\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ nem izomorfak, mert a negyedrendű tényezők száma az egyik felbontásban kettő, a másikban egy. Az eredmény 6-ra 1, 8-ra 3, 16-ra 5 és 32-re 7.

4. a): Ha lenne tizedrendű elem, akkor G ciklikus lenne, és így kommutatív. b): Ha $|f|$ öt, $|t|$ kettő, és $ft = tf$, akkor $|tf|$ tíz lenne (hiszen $(tf)^2 = f^2 \neq e$ és $(tf)^5 = t \neq e$). c): Tanultuk, hogy ha minden elem négyzete e, akkor G kommutatív. d): Párosítsunk minden elemet az inverzével. Az egységelem párja önmaga, és mivel 10 páros, van olyan $g \neq e$, melyre $g = g^{-1}$, azaz g másodrendű. f): Mivel az elem hatványai benne vannak, legalább ötelemű. Ennél nagyobb nem lehet, mert akkor Lagrange tétele miatt tízelemű lenne, ami b)-nek ellentmond. g) Ugyanaz, mint f). h) és i): Ha t másodrendű, akkor g) miatt öt konjugáltja van. Ha f ötödrendű, akkor a négy egységtől különböző hatványa is ötödrendű. Ezzel mind a 10 elemet kimerítettük. j): A tf elem nem hatványa f-nek, és így másodrendű. Másik gondolatmenet: Mivel tft^{-1} ötödrendű, az eddigiek miatt f-nek hatványa. De ha $tft^{-1} = f^i$, akkor $tf^it^{-1} = t^2ft^{-2} = f$, másrészt $tf^it^{-1} = (tft^{-1})^i = f^{i^2}$. Ezért $i^2 \equiv 1$ (5), azaz $i \equiv 1$ vagy -1 modulo 5. De 1 nem lehet, mert akkor t és f felcserélhető lenne. k): Az f^i és az f^it elemek páronként különbözők, ha $0 \leq i \leq 4$, és így kiadják G mind a tíz elemét. Mivel D_5 szorzását az $f^5 = 1$, $t^2 = 1$, $tft^{-1} = f^{-1}$ szabályok egyértelműen meghatározzák, D_5-ben és G-ben ugyanúgy kell számolni, és így izomorfak. Ez a bizonyítás nyilván megy minden páratlan prímre.

5. Álljon A azokból az elemekből, amelyek az $\{5, 6, 7, 8\}$ elemeket fixen hagyják, B pedig azokból, amelyek az $\{1, 2, 3, 4\}$ elemeket hagyják fixen. Ekkor G az A és B normálosztóinak direkt szorzata, és $A \cong B \cong S_4$. A G nem normálosztó S_8-ban, mert $(12) \in G$, de $(15)(12)(15)^{-1} = (25) \notin G$.

7. Legyen $A = \{e, f^2, f^4, t, tf^2, tf^4\} \triangleleft D_6$ és $B = \{e, f^3\} \triangleleft D_6$.

8. Két egyenest kell kiválasztani a síkon. Az egyenesek száma annyi, mint az alaptest elemszáma plusz 1, mert a lehetséges iránytangensek között ott van a végtelen is. Tehát 6 egyenes van, és 15 lehetséges felbontás.

9. Az egyik tényező p a másik p^2 rendű lenne, és az ilyen csoportok kommutatívak.

10. A két tényezőt az általános esetben is a 3 és a -1 generálja. A bizonyítás kulcsa annak megmutatása k szerinti indukcióval, hogy $k \geq 1$ esetén a $3^{2^k} - 1$ számban a 2 kitevője $k + 2$. Ebből következik, hogy a 3 mod 2^n vett rendje 2^{n-2}, és hogy a -1 nincs benne a 3 által generált részcsoportban.

11. Mivel $\mathbb{Z}_{2p^n}^\times \cong \mathbb{Z}_2^\times \times \mathbb{Z}_{p^n}^\times \cong \mathbb{Z}_{p^n}^\times$ ha p páratlan, ezért elég páratlan prímhatványra bizonyítani. Legyen p páratlan prím. Mutassuk meg, hogy az $x^p \equiv 1$ (p^n) kongruenciának csak p megoldása van, alkalmazzuk a véges Abel-csoportok alaptételét, és azt, hogy mod p van primitív gyök.