Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Ötödik alkalom

1. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoportjuk direkt szorzatára, és igenlő válasz esetén adjunk is meg egy-egy ilyen felbontást:* $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, D_3, D_4, Q, A_4, S_5.

2. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ *csoport összes negyedrendű elemét.*

3. *A véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.*

4. *Legyen* G *tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat.*
a) G*-ben nincs tizedrendű elem.*
b) *Ötödrendű elem nem lehet felcserélhető másodrendű elemmel.*
c) G*-ben nem lehet minden elem másodrendű (vö. I/7.).*
d) G*-ben van másodrendű elem (vö. I/9.).*
e) G*-ben van ötödrendű elem.*
f) *Minden ötödrendű elem centralizátora ötelemű.*
g) *Minden másodrendű elem centralizátora kételemű.*
h) G*-ben öt darab másodrendű elem van, és ezek mind konjugáltak.*
i) G*-ben négy darab ötödrendű elem van.*
j) *Ha* $|f| = 5$ *és* $|t| = 2$, *akkor* $tft^{-1} = f^{-1}$.
k) $G \cong D_5$.
Hogyan általánosítható ez a gondolatmenet, ha G *rendje egy prím kétszerese?*

További gyakorló feladatok

5. *Álljon* G *az* S_8 *azon elemeiből, melyek az* $\{1, 2, 3, 4\}$ *részhalmazt önmagába képzik. Mutassuk meg, hogy ez részcsoport, de nem normálosztó* S_8*-ban. Igaz-e, hogy* $G \cong S_4 \times S_4$*?*

6. *Igazoljuk, hogy ha* G *és* H *csoportok, akkor* $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy* $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2^+$.

8. *Hányféleképpen bontható direkt szorzatra* $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$*?*

9. *Ha* p *prím, és a* G *nemkommutatív csoport rendje* p^3, *akkor mutassuk meg, hogy* G *nem bontható fel két valódi részcsoportjának direkt szorzatára.*

10*. *Bizonyítsuk be, hogy* $n \geq 2$ *esetén* $\mathbb{Z}_{2^n}^\times \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}^+$.

11*. *Bizonyítsuk be, hogy páratlan prímhatványokra és a kétszereseikre van primitív gyök. Vezessük le az utolsó két feladatból, hogy milyen modulusokra van primitív gyök.*