Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Negyedik alkalom — megoldásvázlatok

1. Az egységelem centralizátora az egész csoport, így konjugált osztálya egyelemű. Ugyanez mondható el f^2-ről is, mert $tf^2 = f^2t$. Ugyanezért a t centralizátora tartalmazza az e, t, f^2, tf^2 elemeket. Tehát elemszáma 4 vagy 8. De 8 nem lehet, hiszen $tf \neq ft = tf^3$. Tehát t-nek két konjugáltja van, önmaga, és $ftf^{-1} = ftf^3 = tf^2$. Hasonló érvelés mutatja, hogy tf-nek is két konjugáltja van: önmaga, és tf^3. Végül f centralizátora $\langle f \rangle$, hiszen f hatványai biztosan centralizálják f-et, de t nem. Ezért f konjugáltjai a kimaradó két elem, f és f^3. Tehát D_4 konjugált osztályai $\{e\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^3\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$. A centrum az egyelemű osztályok egyesítése, tehát $\{e, f^2\}$. A normálosztók azok a részcsoportok, amik konjugált osztályok egyesítései, elemszámuk pedig 8-nak osztója. Kételemű normálosztó tehát csak $\{e, f^2\}$ lehet, és a négyelemű normálosztókban is benne kell, hogy legyen e-n kívül f^2 is (mert a többi konjugált osztálynak páros sok eleme van). Könnyű látni, hogy az így kapott összes lehetőség, $\{e, f^2, f, f^3\}$, $\{e, f^2, t, tf^2\}$, $\{e, f^2, tf, tf^3\}$ normálosztót ad. A két triviálissal együtt tehát hat normálosztó van. A csoport feloldható (mert 2-csoport vagy mert például $\{e\} \triangleleft \{e, f^2\} \triangleleft \{e, f^2, f, f^3\} \triangleleft D_4$ normállánc, melynek faktorai prímrendűek).

2. Egy 200 elemű csoport kompozícióláncában minden faktor rendje 200-nak osztója. Ilyen rendű nemkommutatív egyszerű csoport azonban a lista szerint nincs. Ezért a kompozíciófaktorok prímrendűek.

3. Legyen $N = \{e, a\}$. Az $\{e\}$ mindig konjugált osztálya G-nek, és mivel N a G konjugált osztályainak egyesítése, $\{a\}$ is az. Tehát $a \in Z(G)$.

4. Ez a részhalmaz mindig konjugált osztályok egyesítése, hiszen másodrendű elem konjugáltja mindig másodrendű (sőt, általában a konjugálás megőrzi az elemrendet, hiszen ez a csoportnak önmagába képző izomorfizmusa). De ez a részhalmaz nem feltétlenül részcsoport, például D_4-ben sem az.

5. Legyen $gZ(G)$ a $G/Z(G)$ generátoreleme. Ekkor a $g^nZ(G)$ halmazok kiadják a G összes elemét. De ezek elemei felcserélhetők, hiszen ha $a, b \in Z(G)$, akkor $(g^n a)(g^m b) = (g^m b)(g^n a)$.

6. Legyen E_{ij} $(i > j)$ az a mátrix, amiben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi nulla. Ekkor $E + E_{ij}$ invertálható. Könnyű számolás mutatja, hogy ha egy mátrix az $E + E_{ij}$ mátrixok mindegyikével felcserélhető, akkor az egységmátrix skalárszorosa.

7. A centrum azokból a mátrixokból áll, melyekben a jobb felső sarokban tetszőleges elem állhat, a főátlóban 1-esek, másutt nulla. A többi állítás közvetlen számolással igazolható.

8. Az N a G konjugált osztályainak egyesítése, amelyek elemszáma vagy 1, vagy p-vel osztható. Benne van az egységelem, ez egyelemű osztály. Mivel p osztja N rendjét, kell lennie még N-ben egyelemű osztálynak.

12. Mivel a konjugálás szorzattartó, az állítást elég egy ciklusra megmutatni. Viszont közvetlen számolással adódik, hogy $g(12\dots k)g^{-1} = (g(1)g(2)\dots g(k))$.

13. Az A_5 és S_5 nem feloldható, a többi igen. Az S_5 egyetlen nemtriviális normálosztója A_5, konjugált osztályait az előző feladatból kapjuk. Az A_n konjugált osztályait az S_n konjugált osztályaiból úgy kapjuk, hogy néhányat ketté kell bontanunk. Ugyanis elképzelhető, hogy két elemet az S_n-ben egymásba lehet konjugálni, de az A_n-ben ezek az átkonjugáló elemek nincsenek benne. Az A_5-ben az ötösciklusok két tizenkételemű osztályt, a hármasciklusok egy húszelemű osztályt, az $(ab)(cd)$ alakú permutációk egy tizenöt elemű osztályt alkotnak. Az A_5 osztályegyenlete tehát: $1 + 12 + 12 + 20 + 15 + 15 = 60$. Ezekből a számokból nem lehet összeadással kikeverni 60 valódi osztóját úgy, hogy 1 is köztük legyen, és így A_5 egyszerű.

14. Legyen S az 1 stabilizátora A_n-ben. Tegyük fel, hogy $N \triangleleft A_n$ és $e \neq h \in N$, mondjuk $h(1) = 2$. Minden $i \in \{2, \dots, n\}$-hez van olyan $g_i \in A_n$, hogy $g_i(1) = 1$, és $g_i(2) = i$. Az N-beli $h_i = g_i h g_i^{-1}$ az 1-et i-be viszi. Tehát N tranzitív. Megmutatjuk, hogy $|N \cap S| > 1$. Tegyük fel, hogy nem, ekkor $k \in N$ esetén $k^{-1}h_{k(1)} \in S \cap N$, vagyis $N = \{e, h_2, \dots, h_n\}$. Ha tehát $g \in S$, akkor $gh_ig^{-1} = h_{g(i)}$, hiszen a baloldal az 1-et $g(i)$-be viszi. Az indexek átpermutálásával feltehető, hogy h_2 és h_3 nem egymás inverzei, és így $j = h_2h_3(1) \notin \{1, 2, 3\}$. Mivel $n \geq 6$, van olyan $g \in A_n$, ami fixálja az 1, 2, 3 elemeket, de j-t nem. Ekkor $gh_2h_3g^{-1} = gh_2g^{-1}gh_3g^{-1} = h_2h_3$, és 1-et helyettesítve a $g(j) = j$ ellentmondást kapjuk. Tehát $|S \cap N| > 1$. Nyilván $S \cong A_{n-1}$, ami egyszerű az indukciós feltevés miatt. Mivel $S \cap N \triangleleft S$ ezért $S \subseteq N$. Ekkor $h_iS \subseteq N$, de ezek az összes S szerinti mellékosztályt kiadják, és így $N = A_n$.