Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Negyedik alkalom

1. *Állapítsuk meg az D_4 csoport konjugált osztályait, normálosztóit, centrumát, és azt, hogy a csoport feloldható-e.*

2. *A véges, nemkommutatív egyszerű csoportok rendjeinek felsorolása így kezdődik:* 60, 168, 360, 504, 660, 1092, 2448, 2520, 3420, 4080, 5616, 6048, 6072, 7800, 9828, 12180, 14880, 20160, 20160, 25308, 25920, ... *Igazoljuk, hogy minden 200 elemű csoport feloldható.*

3. *Legyen N kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy $N \leq Z(G)$.*

4. *Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport azon elemei, melyeknek a négyzete az egységelem, részcsoportot alkotnak, akkor ez egyben normálosztó is. Igaz-e mindig, hogy ez a részhalmaz részcsoport?*

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus csoport, akkor G Abel.*

6. *Igazoljuk, hogy $GL(n, T)$ centruma az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*

7. *Legyen $p > 2$ prím. A $GL(3, p)$ csoportban tekintsük azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csupa 0, a főátlójában pedig csupa 1 áll. Igazoljuk, hogy egy p^3 elemszámú G részcsoportot kaptunk, mely nem kommutatív, és minden egységtől különböző eleme p rendű. Határozzuk meg ennek a csoportnak a centrumát.*

További gyakorló feladatok

8. *Mutassuk meg, hogy ha P véges p-csoport valamilyen p prímre, és N nemtriviális normálosztó P-ben, akkor $|N \cap Z(P)| > 1$.*

9. *Legyen N normálosztó a G csoportban. Rendeljük hozzá G/N tetszőleges K részcsoportjához a K elemeinek uniójából képzett L halmazt. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) *L részcsoport G-ben, melynek indexe G-ben ugyanaz, mint K indexe G/N-ben.*
b) *Az így megadott megfeleltetés bijekció G/N összes részcsoportja, és a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjai között.*
c) *Ennél a megfeleltétésnél G/N normálosztói éppen a G csoport N-et tartalmazó normálosztóinak felelnek meg.*
d) *$K \cong L/N$, és ha K normálosztó, akkor $(G/N)/K \cong G/L$.*

10*. *Mutassuk meg, hogy ha P véges p-csoport valamilyen p prímre, akkor minden p indexű részcsoportja normálosztó.*

11. *Legyen $g \in G \leq S_X$. Mutassuk meg, hogy $gG_xg^{-1} = G_{g(x)}$.*

12. *Bizonyítsuk be, hogy az S_n csoportban két elem akkor és csak akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma", azaz a két felbontásban az azonos hosszúságú ciklusok száma megegyezik. Vezessük le ebből azt az elmúlt félévben gyakorlaton már bizonyított állítást, hogy S_n-ben az $(12\ldots n)$ elem centralizátora a saját hatványaiból áll.*

13. *Állapítsuk meg az alább felsorolt csoportok konjugált osztályait, normálosztóit, centrumát, és azt, hogy a csoport feloldható-e: D_3, D_5, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $GL(2, 2)$.*

14*. *Mutassuk meg az előző feladat eredményéből kiindulva, n szerinti indukcióval, hogy A_n egyszerű, ha $n \geq 5$.*