Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Harmadik alkalom — megoldásvázlatok

1. Az izomorfia-osztályok: $\{\mathbb{Z}_2^+, \mathbb{Z}_3^\times, \mathbb{Z}_6^\times, S_2\}$, $\{\mathbb{Z}_3^+, A_3\}$, $\{\mathbb{Z}_4^+, \mathbb{Z}_5^\times\}$, $\{\mathbb{Z}_8^\times, \mathbb{Z}_{12}^\times\}$, $\{S_3, D_3, GL(2,2)\}$, $\{D_4\}$, $\{Q\}$, $\{\mathbb{Z}_8^+\}$. *Indoklás:* Izomorf csoportok rendje egyenlő. Megfordítva, egyenlő rendű **ciklikus** csoportok izomorfak. Mivel prímrendű csoportok ciklikusak, elintéztük a 2 és 3 rendű csoportokat. A **2**. feladat megmutatja, hogy negyedrendű csoport kétféle van, ezeket az különbözteti meg, hogy van-e bennük negyedrendű elem. A három hatodrendű csoport azért izomorf, mert mindegyik elemeit egy-egy háromelemű halmaz összes permutációi határozzák meg. Ez a háromelemű halmaz az S_3 esetén az $\{1,2,3\}$, a D_3 esetén egy szabályos háromszög három csúcsa, a $GL(2,2)$ esetén pedig a $\mathbb{Z}_2$ feletti kétdimenziós vektortér összesen három, nem nulla vektora. Az utolsó három, nyolcadrendű csoport közül semelyik kettő sem izomorf: egyetlen kommutatív van, a másik kettőben pedig nem ugyanaz a negyedrendű elemek száma.

2. Legyen G negyedrendű csoport. Ha van benne negyedrendű elem, akkor az generálja az egész csoportot, hiszen négy különböző hatványa van. Ezért ilyenkor G ciklikus, és $G \cong \mathbb{Z}_4^+$. Ha nincs negyedrendű elem, akkor Lagrange tétele miatt az egységelem kivételével minden elem másodrendű. Legyenek ezek az elemek a, b, c. Megmutatjuk, hogy ezek közül bármely kettő szorzata a harmadik. Valóban, ha $ab = e$ lenne, akkor $a^2 = e$ miatt $b = aab = a$, ami lehetetlen. Ha $ab = a$ lenne, akkor egyszerűsítve $b = e$, ez sem lehet. Ugyanezért $ab = b$ sem lehet. Marad az a lehetőség, hogy $ab = c$. De ezzel a csoportban az összes szorzatot meghatároztuk, hiszen az egységelemmel tudjuk, hogyan kell szorozni. Tehát az ilyen csoportok mind izomorfak, mindegyikben ugyanúgy kell szorozni.

4. a) Nem. b) Igen, kép: nem nulla valós számok, mag: egységkör. c) Igen, kép: pozitív valósak, mag: csak a nulla. d) Igen, kép: egységkör, mag: $2\pi k$, ahol k egész. e) Igen, kép: az egész $T^\times$, mag: 1 determinánsú mátrixok. f) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}^\times$, azaz $\{1, -1\}$, mag: A_n. g) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}_n^+$, mag: az n-nel osztható számok. h) Igen, kép: $\{0, 20, 40, 60, 80\}$, mag: $\{0, 5, 10, 15, \ldots, 90, 95\}$. i) Igen, kép: az egész $\mathbb{Z}_2^+$, mag: forgatások. j) Igen, kép: az összes komplex szám, mag: az $x^2 + 1$ polinom többszörösei.

5. a) A **4**/b-beli homomorfizmusra kell alkalmazni. A faktorcsoport elemei az origó körüli körök. b) $\varphi(x) = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$. c) A **4**/f-beli homomorfizmus. d) A **4**/g-beli homomorfizmus.

6. Az első faktorcsoport elemei $E = \{e, f^2\}$, $A = \{f, f^3\}$, $B = \{t, tf^2\}$, $C = \{tf, tf^3\}$. Az E az egységelem, rendje 1. Az A^2 szorzatot úgy számítjuk ki, hogy veszünk A-ból egy reprezentánselemet, ez legyen f, négyzetre emeljük, és megnézzük, melyik osztályban van. Látjuk, hogy $f^2 \in E$, és ezért $A^2 = E$. Ezért az A elem rendje kettő, hiszen négyzete az egységelem, de ő nem az egységelem. Hasonlóan adódik, hogy B és C is másodrendű. A szorzástáblát felírva a Klein-csoportot kapjuk.

A második faktorcsoport elemei: $E = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$, $F = \{(123), (134), (243), (142)\}$, $F^2 = \{(132), (143), (234), (124)\}$, $T = \{(12), (34), (1324), (1423)\}$, $TF = \{(23), (14), (1342), (1243)\}$, $TF^2 = \{(13), (24), (1234), (1432)\}$. A csoport $D_3 \cong S_3$-mal izomorf, az izomorfizmusnál $F \leftrightarrow f$ és $T \leftrightarrow t$. Annak belátásához, hogy ez izomorfizmus, 36 szorzatot kellene ellenőrizni, vagy a **3.** Feladatot alkalmazni. Ehelyett vegyük észre, hogy az osztályok legelső elemei pontosan a 4-et fixen hagyó permutációk, azaz az $\{1,2,3\}$ összes permutációi, és így S_3-mal izomorf részcsoportot alkotnak. Ha ezeket választjuk reprezentánsoknak, akkor világos, hogy a faktorcsoportban ugyanúgy kell számolni, mint S_3-ban.

7. a) Ez négyelemű csoport, tehát vagy ciklikus, vagy Klein. Mivel minden elem négyzete benne van a normálosztóban, ami szerint faktorizálunk, a Klein-csoportot kapjuk. b) $\mathbb{Z}_3^+$, hiszen háromelemű. c) $\mathbb{Z}_2^+$, hiszen kételemű. d) Mivel minden elem négyzete 1 vagy 9, a Klein-csoportot kapjuk.

8. A kocka hat-hat alkalmas lapátlóját behúzva egy-egy szabályos tetraédert kapunk. A kocka bármelyik szimmetriája egy ilyen tetraédert vagy önmagába, vagy a másik ilyen tetraéderbe viszi. Rendeljük hozzá a szimmetriához a -1-et, ha cseréli, és a $+1$-et, ha helyben hagyja a tetraédereket. Ez nyilván homomorfizmus a kételemű csoportba, és így magja $48/2 = 24$ elemű a homomorfizmus-tétel miatt. Ez a 24-elemű részcsoport egy tetraéder csúcsait permutálja. Más permutációnak más szimmetria felel meg, hiszen ha egy szimmetria a tetraéder minden csúcsát fixálja, akkor a kockán is az identitás. Mivel $4! = 24$, a tetraéder négy csúcsának összes permutációját megkapjuk. Ez a részcsoport tehát S_4-gyel izomorf.

9. Nyilván részcsoport képe részcsoport, bal (jobb) mellékosztály képe bal (jobb) mellékosztály.

10. $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{id, (123)(456), (132)(465), (14)(26)(35), (15)(24)(36), (16)(25)(34)\}$.