Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Harmadik alkalom

1. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük:* $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q *(a kvaterniócsoport)*, $GL(2,2)$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha* G *négyelemű csoport, akkor* $G \cong \mathbb{Z}_4^+$ *vagy* $G \cong \mathbb{Z}_8^\times$. *Ez utóbbi csoportot (és a vele izomorfakat) Klein-csoportnak nevezzük.*

3*. *Bizonyítsuk be, hogy ha* G *hatelemű csoport, akkor* $G \cong \mathbb{Z}_6^+$ *vagy* $G \cong S_3$.

4. *Döntsük el az alábbi* $\varphi : G_1 \to G_2$ *leképezésekről, hogy homomorfizmusok-e. Ha igen, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*

a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
e) $G_1 = GL(n,T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
f) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az* f *előjele (azaz* ± 1*).*
g) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(a)$ *az* a *maradéka mod* n.
h) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
i) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha* x *forgatás,* 1 *ha* x *tengelyes tükrözés.*
j) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$.

5. *A homomorfizmus-tétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*

a) $\mathbb{C}^\times/\text{egységkör} \cong \text{pozitív valós számok a szorzásra}$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktorcsoportnak az elemei?*
b) $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \cong \text{komplex egységkör a szorzásra}$.
c) $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.
d) $\mathbb{Z}^+/n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

6. *Állapítsuk meg az alábbi faktorcsoportok elemeinek rendjeit, és írjuk fel a szorzástábláikat:* $D_4/\{e, f^2\}$, $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. *A kapott faktorok izomorfak-e valamilyen ismert csoporttal?*

7. *Állapítsuk meg, milyen ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok:*

a) $D_8/\{e, f^2, f^4, f^6\}$.
b) $A_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$.
c) $D_n/\{e, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$.
d) $\mathbb{Z}_{16}^\times/\{1, 9\}$.

8. *Van-e a kocka szimmetriacsoportjának* S_4*-gyel izomorf részcsoportja?*

9. *Bizonyítsuk be, hogy izomorfizmusnál normálosztó képe normálosztó.*

10. *Keressük meg* S_4*-nek azt a részcsoportját, amit a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz rendel. Tegyük meg ugyanezt* S_6*-ban a* D_3 *csoporttal is.*