Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Második alkalom — megoldásvázlatok

1. a) Orbitok: origó középpontú körök. Stabilizátorok: egyeleműek, kivéve, hogy az origó stabilizátora G. b) Orbitok: az x-tengellyel párhuzamos egyenesek. Stabilizátorok: egyeleműek. c) Tranzitív. Stabilizátorok: kételeműek (identitás, és a megfelelő csúcson átmenő tengelyre való tükrözés). d) Orbitok: az adott csúcson átmenő tengelyre szimmetrikus pontpárok, illetve a tengelyen levő csúcsok önmagukban. Stabilizátorok: egyelemű orbitokhoz az egész csoport, kételemű orbithoz egyelemű stabilizátor tartozik. e) Tranzitív, az x pont stabilizátora az x-et nem tartalmazó két hármasciklus és az identitás. f) Tranzitív, a stabilizátorok egyeleműek. g) Az x stabilizátora az x-szel felcserélhető elemek halmaza.

2. a) A páros számok részcsoportja. Ugyanis ez nyilván a 28 és 34 számokat tartalmazó részcsoport. Megmutatjuk, hogy ez a legszűkebb, vagyis ha $H \leq G$, $28, 34 \in H$, akkor H minden páros számot tartalmaz. Valóban, $2 = (28, 34) = 28x + 34y$ alakban írható, ahol x, y egész, és ezért $2 \in H$. Tehát H tényleg minden páros számot tartalmaz. b) Az eredmény A_4. Ebben az adott elemek benne vannak. Tegyük fel, hogy H az adott elemeket tartalmazó részcsoport, meg kell mutatni, hogy A_4 minden eleme H-beli. Ezt meg lehetne úgy mutatni, hogy A_4 minden elemét kifejezzük (123) és (12)(34) segítségével. De Lagrange tétele miatt $|H|$ osztója $|A_4| = 12$-nek, tehát elég 7 elemet kifejezni. Nyilván $(12)(34)$, *id*, (123), $(132) = (123)^2$, $(243) = (12)(34)(123), (234) = (243)^2$, $(124) = (123)(243) \in H$. c) A $2^n 3^m$ alakú valós számok, ahol n és m egészek. d) Azok a mátrixok, melyek determinánsa 2-hatvány. Ezek a determinánsok szorzástétele miatt részcsoportot alkotnak, ami minden 2 determinánsú mátrixot tartalmaz. Tehát elég belátni, hogy minden ilyen mátrix kifejezhető 2 determinánsúakkal. Ha $\det M = 2^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, akkor legyen N tetszőleges 2 determinánsú mátrix és $K = MN^{-n+1}$. Ekkor nyilván $\det K = 2$ és $M = KN^{n-1}$.

3. a) 8, a csoport tranzitív, mert a síkra tükrözésekkel egy csúcs minden csúcsba elvihető, és a stabilizátorok triviálisak. b) 16, ismét tranzitív, egy csúcs stabilizátora pedig kételemű (a vele egy négyzetlapon lévő két szomszédja helyet cserélhet az átlósíkra való tükrözésnél). c) 12, tranzitív, és kételeműek a stabilizátorok.

4. 2: egy él. 4: egy négy hosszú kör egy átlóval. 3: egy 9 hosszú kör csúcsaira alkalmasan 1 és 2 hosszú utakat akasztunk. 1: egy háromszög csúcsaira alkalmasan 1 és 2 hosszú utakat akasztunk.

5. Elég belátni, hogy a stabilizátorok triviálisak. Ha $g(x) = x$ és y tetszőleges, akkor a tranzitivitás miatt van olyan $h \in A$, melyre $h(x) = y$. Ekkor $g(y) = gh(x) = hg(x) = h(x) = y$. Tehát g az identitás.

6. $f(y) = y \iff fg(x) = g(x) \iff g^{-1}fg(x) = x \iff g^{-1}fg \in H \iff fg \in gH \iff f \in gHg^{-1}$.

7. A csoport elemszáma **1**/c szerint $2n$, ez n forgatás, és n egyenesre való tükrözés (az egyenesek páratlan n esetén oldalfelező merőlegesek, páros n esetén ezeken kívül még átlók). A forgatások az f^i elemek, és nyilván tf^i tükrözés (nem forgatás, mert $tf^i = f^j \implies t = f^{j-i}$, márpedig t nem forgatás). A felsorolt elemek páronként különbözők (mert $tf^i = tf^j \implies f^i = f^j$, és tükrözés nem egyenlő forgatással). Ezért ez a $2n$ elem a D_n összes elemét kiadja. De f^it is tükrözés, így $(f^it)^2 = id \implies f^it = (f^it)^{-1} = tf^{-i}$.

8. D_5-ben az egész csoportot kapjuk. Valóban, $(f^2)^3 = f^6 = f$, vagyis $f \in \langle f^2, t\rangle$. De az előző feladatban láttuk, hogy f és t az egész csoportot generálja. D_6-ban egy hatelemű részcsoportot kapunk, ebben f^i és tf^i szerepel, ahol i páros. Ezek valóban részcsoportot alkotnak, mert ez a hatszögbe beírt (bármelyik) szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

9. Legyen $H = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$ és $K = \{g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n} \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$. Mivel H részcsoport, amely a $g_1, \ldots, g_n$ elemeket tartalmazza, ezért $g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n} \in H$, és így $K \subseteq H$. Belátjuk, hogy K részcsoport. Nyilván az egységelem benne van K-ban (ha minden kitevőt nullának választunk), és a kommutativitás miatt K bármely két elemének szorzata és bármely elemének inverze is a kívánt alakra hozható. Ezért K tényleg részcsoport. Továbbá $g_i \in K$ (legyen $k_i = 1$, a többi kitevő nulla). Tehát K részcsoport, ami a $g_1, \ldots, g_n$ elemeket tartalmazza. De H a legszűkebb ilyen tulajdonságú részcsoport, tehát $H \subseteq K$.

11. Tegyük fel, hogy adott véges sok tört. Megmutatjuk, hogy ezek együtt nem generálhatják $\mathbb{Q}$ additív csoportját. Vegyünk egy olyan p prímet, ami a törtek egyikének a nevezőjét sem osztja. Ekkor $1/p$ nem fejezhető ki törtjeink egész együtthatós lineáris kombinációjaként, hiszen egy ilyen lineáris kombinációt közös nevezőre hozva a nevezőben nem szerepel a p (márpedig a racionális számok redukált tört alakja egyértelmű a számelmélet alaptétele miatt).