**Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév**

*Második alkalom*

**1.** *Határozzuk meg az alábbi $G \leq S_X$ permutációcsoportokban az orbitokat és a stabilizátorokat.*

*a) $X$ a sík pontjai, $G$ az origó körüli forgatások csoportja.*

*b) $X$ a sík pontjai, $G$ az $x$-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.*

*c) $X$ egy szabályos $n$-szög csúcsai, $G$ ezt az $n$-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportja.*

*d) $X$ egy szabályos $n$-szög csúcsai, $G$ ezt az $n$-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportjának egy adott csúcsot fixáló elemei.*

*e) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$.*

*f) $X$ az $S_3$ csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gx$, a $G$ csoport az $f_g$ permutációkból áll.*

*g) $X$ az $S_3$ csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gxg^{-1}$, a $G$ csoport az $f_g$ permutációkból áll (itt csak a stabilizátorok kellenek).*

**2.** *Határozzuk meg a $G$ csoportban az $X$ által generált részcsoportot:*

*a) $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$.*

*b) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.*

*c) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \{2, 3\}$.*

*d) $G = GL(n, \mathbb{R})$, $X$ a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*

**3.** *Határozzuk meg az alábbi alakzatok szimmetriáinak számát.*

*a) Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.*

*b) Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.*

*c) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.*

**4.** *Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek rendre pontosan 2, 4, illetve 3 szimmetriája van. Rajzoljunk olyat is, aminek csak 1 van (az identitás).*

**5.** *Igazoljuk, hogy ha $A \leq S_n$ Abel-féle és tranzitív, akkor $|A| = n$.*

**6.** *Legyen $G \leq S_X$ és $x, y \in G$. Mutassuk meg, hogy ha $g(x) = y$, és $x$ stabilizátora $H$, akkor $y$ stabilizátora $gHg^{-1}$.*

**7.** *Legyen $f$ a $D_n$ diédercsoportban egy $2\pi/n$ szögű forgatás, $t$ pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy $D_n$ minden eleme egyértelműen felírható $f^i$ vagy $tf^i$ alakban, ahol $0 \leq i < n$. Igazoljuk azt is, hogy $f^i t = tf^{-i}$ minden $i$ egészre.*

**8.** *Határozzuk meg a $D_5$ és $D_6$ diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.*

**9.** *Igazoljuk, hogy Abel-csoportban $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle = \{g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n} \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$.*

**10.** *Igazoljuk, hogy ha a $G$ csoportnak csak a két triviális részcsoportja van, akkor $G$ prímrendű ciklikus.*

**11.** *Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált.*

**12$^{**}$.** *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*