**Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév**

*Első alkalom — megoldásvázlatok*

**1.** a) Igen, az osztályok a két irányban végtelen, 1999 differenciájú számtani sorozatok. b) Nem, mert nem tranzitív, például $0\ R\ 1$ és $1\ R\ 2$ igaz, de $0\ R\ 2$ nem. c) és d) Igen, az osztályok az origó középpontú körök. e) Igen, ha $f$ értékkészlete $Y$, akkor egy osztály az $Y$ egy elemének őusképeiből áll.

**2.** Az $S_3$ részcsoportjai 1, 2, 3 és 6 eleműek lehetnek ($|S_3| = 6$ osztói). Nyilván csak $\{id\}$ lesz 1 rendű és csak az egész $S_3$ lesz 6 rendű. Egy másodrendű részcsoportban csak első és másodrendű elemek lehetnek a Lagrange tétel miatt, vagyis egy darab első, és egy darab másodrendű elem fér el. Ezért a kételemű részcsoportok $\{id, (12)\}$, $\{id, (13)\}$, $\{id, (23)\}$. Harmadrendű részcsoportban csak harmad- és elsőrendű elem lehet. Elsőrendű elem csak az $id$. Ha van egy $f$ harmadrendű, akkor $f$, $f^2$, $f^3 = id$ kiadják az egész részcsoportot. Csak két harmadrendű elem, és így csak egy harmadrendű részcsoport van, az $\{id, (123), (132)\} = A_3$. A $H = \{id, (12)\}$-höz tartozó baloldali mellékosztályok $id \cdot H = (12)H = H$, $\quad (13)H = (123)H = \{(13), (123)\}$ és $(23)H = (132)H = \{(23), (132)\}$, a jobboldaliak pedig $H \cdot id = H(12) = H$, $\quad H(13) = H(132) = \{(13), (132)\}$ és $H(23) = H(123) = \{(23), (123)\}$. Negyedrendű részcsoportban az elemek rendje 1, 2 és 4 lehet. Ha van negyedrendű elem, ennek hatványai négyen vannak, tehát kiadják a részcsoportot. De az $A_4$ csoportban nincs negyedrendű elem, mert a négyesciklus pártalan permutáció. Ha a részcsoportban nincs negyedrendű elem, akkor az egységelemen kívül három másodrendű elemnek kell szerepelnie. Az $A_4$ másodrendű elemei $(12)(34)$, $(13)(24)$ és $(14)(32)$, tehát az egyetlen lehetőség, hogy ezek alkotnak az egységelemmel negyedrendű részcsoportot. A szorzásokat elvégezve látjuk, hogy ezek tényleg részcsoportot alkotnak.

**3.** a) Négy szimmetria van: az identitás (rendje 1), az oldalfelező merőlegesekre való tükrözések (rendjük 2), és a középpontos tükrözés (rendje 2). Több szimmetria nincs, mert egy oldal sem átlóba, sem a másik hosszúságú oldalba nem mehet át. b) Két szimmetria: egy átlóra tükrözés és az identitás. c) Négy szimmetria: az átlóra tükrözések, a középpontos tükrözés és az identitás. d) Nyolc szimmetria: az identitás, tengelyes tükrözések az átlókra és az oldalfelező merőlegesekre, a középpontos tükrözés, és két (4 rendű) $90^\circ$-os forgatás.

**4.** Ha $H = AB$ részcsoport, akkor $H^{-1} = H$, de tudjuk, hogy $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, és így $AB = H = H^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$. Megfordítva, ha $H = AB = BA$, akkor $HH = ABAB = AABB = AB = H$ és $H^{-1} = (AB)^{-1} = BA = AB = H$, tehát $H$ részcsoport. Elemekkel is számolhattunk volna, úgy hosszabb.

**6.** Ez az index $n$. Ugyanis az $a + n\mathbb{Z}^+$ és $b + n\mathbb{Z}^+$ mellékosztályok akkor és csak akkor egyeznek meg, ha $a - b \in n\mathbb{Z}^+$, azaz ha $a \equiv b\ (n)$. Tehát minden szám mellékosztálya ugyanaz, mint az $n$-nel való osztási maradékának a mellékosztálya, de a $0, 1, \ldots, n-1$ maradékok csupa különböző mellékosztályban vannak.

**7.** Az $(ab)^2 = e$ összefüggést balról $a$-val, jobbról $b$-vel szorozva $aababb = ab$ adódik. De $a^2 = e = b^2$, és így $aababb = ba$. Tehát $G$ Abel. Negyedik hatványra a négyzet szimmetriacsoportja ellenpélda.

**8.** Tudjuk, hogy $b^\ell = e$ akkor és csak akkor, ha $|b|$ osztója $\ell$-nek. Legyen $|g| = n$, $|h| = m$, $|gh| = k$. Ekkor $(gh)^{nm} = (g^n)^m(h^m)^n = e^m e^n = e$, vagyis $k = |gh|$ osztója $nm$-nek. A $(gh)^k = e$ összefüggést $n$-edik hatványra emelve $e = (gh)^{kn} = (g^n)^k h^{kn} = e^k h^{kn} = h^{kn}$ adódik, vagyis $m = |h|$ osztója $kn$-nek. De $(m, n) = 1$, így $m \mid k$. Szerepcserével kapjuk, hogy $n \mid k$. Mivel $(n, m) = 1$, ezért $nm \mid k$. A feltételek egyike sem hagyható el. Ha $(n, m)$ nem feltétlenül 1, akkor legyen $h = g^{-1}$, ekkor rendjük egyenlő, de a szorzat rendje 1. Ha pedig $g = (12)$ és $h = (123)$, akkor $gh \neq hg$, a szorzat rendje pedig 2 és nem 6.

**9.** Ha van másodrendű elem, akkor $|G|$ páros Lagrange tétele miatt. Megfordítva, párosítsunk minden elemet az inverzével. Az egységelem párja önmaga. Ha $|G|$ páros, akkor kell lennie még egy $g$ elemnek, aminek a párja önmaga. Ekkor $g = g^{-1}$, azaz $g^2 = e$. De $g \neq e$, és ezért $|g| = 2$.

**11.** Legyen $K = g^{-1}Hg$. Ekkor $KK = g^{-1}Hgg^{-1}Hg = g^{-1}HHg = g^{-1}Hg = K$, és $K^{-1} = (g^{-1}Hg)^{-1} = g^{-1}H^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg = K$, hiszen invertáláskor a sorrend megfordul, $(g^{-1})^{-1} = g$ és $H^{-1} = H$. A $h \mapsto g^{-1}hg$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű $H$ és $K$ között, hiszen van inverze, a $k \mapsto gkg^{-1}$ leképezés. Ezért $|H| = |K|$. Végül nyilván $Hg = gg^{-1}Hg = gK$, tehát az utolsó állítás igaz.

**12.** A hatvány rendjének képlete szerint $|g^n| = |g|/(n, |g|)$. Ha $G$ véges, és $e \neq g \in G$, akkor $|g|$ véges (hiszen $|G|$-nek osztója), de nem 1, így van egy $p$ prímosztója. Ha $n = |g|/p$, akkor a képlet szerint $|g^n| = p$.

**13.** Nem. Ha $\varepsilon$ egy $3^n$-edik egységgyök, akkor az általa generált részcsoport véges, elemszáma legfeljebb $3^n$. Tehát nem lehet az egész csoport, aminek végtelen sok eleme van.