Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Tizenegyedik alkalom

Ezen a feladatsoron, részben már a szigorlatra való tekintettel, az alábbi témakörök szerepelnek: karakterisztika, prímtest, véges testek, algebrailag zárt testek, Frobenius-tétel, rendezett gyűrűk, főideálgyűrűk. Egyes témaköröket csak érinteni tudunk, további gyakorló feladatok találhatók a Czédli-Szendrei-Szendrei feladatgyűjteményben.

1. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) *A páros számok gyűrűjének hányadosteste izomorf $\mathbb{Z}$-vel.*

b) *A Gauss-egészek gyűrűjének hányadosteste izomorf $\mathbb{Q}(i)$-vel.*

c) *Véges gyűrűben nem lehet olyan elem, melynek additív rendje* 6.

d) *Véges nullosztómentes gyűrűben nem lehet olyan elem, melynek additív rendje* 6.

e) *Van olyan végtelen test, aminek a karakterisztikája* 2.

f) *Van olyan algebrailag zárt test, aminek a karakterisztikája* 2.

g) *A $\mathbb{Z}_p$ test felett minden $n \geq 1$-re létezik n-edfokú irreducibilis polinom.*

h) *Ha K karakterisztikája nem kettő, akkor K minden másodfokú bővítése egy K-beli elem négyzetgyökének adjungálásával kapható. (És ha a karakterisztika kettő?)*

i) *Egy $p \neq 0$ karakterisztikájú testben pontosan 1 darab p-edik egységgyök van.*

2. *Hány gyöke van a 27-elemű testben az $x^4+x^3+x^2+x+1$ és az x^2-x+1 polinomnak?*

3. *Határozzuk meg az alábbi polinomok felbontási testének fokát: x^4-2 a $\mathbb{Z}_2$ felett; x^4-1 a $\mathbb{Z}_2$ felett; x^4-x a $\mathbb{Z}_2$ felett; x^8-x a $\mathbb{Z}_2$ felett; x^2+1 a $\mathbb{Z}_{17}$ felett; x^2-3 a $\mathbb{Z}_{17}$ felett; $x^{11}-1$ a $\mathbb{Z}_2$ felett (ez utóbbi nehezebb).*

4. *Legyen $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$ (a nyolcelemű test), és K a prímteste. Mutassuk meg, hogy a $\varphi : x \mapsto x^2$ leképezés relatív automorfizmusa L-nek K felett. Mik ennek a fixpontjai? Mennyi a φ rendje a bővítés Galois-csoportjában? Hány elemű ez a csoport? Mik a közbülső testek? Igaz-e a Galois-elmélet főtétele erre a bővítésre?*

5. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel feltételei mind szükségesek.*

6. *Mutassuk meg, hogy az alábbi megfeleltetés gyűrű-izomorfizmus (sőt $\mathbb{R}$ feletti algebra-izomorfizmus) a kvaterniótest, és a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixgyűrű egy részgyűrűje között. Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy a kvaterniók tényleg gyűrűt alkotnak.*

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R}).$$

7. *Hány rendezése van a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gyűrűnek?*

8. *Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, és $a, b \in R$.*

a) *Mutassuk meg, hogy $(a) = (b)$ akkor és csak akkor teljesül, ha a és b asszociáltak.*

b) *Jelölje (a, b) az $\{ar + bs \mid r, s \in R\}$ halmazt. Mutassuk meg, hogy (a, b) ideál az R-ben, mégpedig a legszűkebb olyan ideál, amely a-t is és b-t is tartalmazza.*

c) *Tegyük fel, hogy van olyan $c \in R$, amelyre $(a, b) = (c)$. Mutassuk meg, hogy akkor c* kitüntetett közös osztója a-nak és b-nek *(azaz c osztója a-nak és b-nek, és osztható a és b mindegyik közös osztójával).*

9. *Főideál-e $\mathbb{Z}[x]$-ben $(x+1, x+2)$ illetve $(2x+2, x+4)$?*