Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Tizedik alkalom

Legyen K test, és $f \in K[x]$ irreducibilis polinom. Beláttuk, hogy az $L = K[x]/(f)$ faktorgyűrű test, és azt is, hogy ha $c \in K[x]$ konstans polinom, akkor a $c^* = c + (f)$ maradékosztályok az L-nek egy K-val izomorf résztestét alkotják. Ha tehát a c elemet azonosítanánk c^*-gal, akkor (pongyolán) azt is mondhatnánk, hogy L valójában a K-nak bővítése. Azt is állítottuk (szintén pongyolán), hogy az f polinomnak már van gyöke L-ben. Ez az állítás szó szerint értelmetlen, hiszen az f polinomba L elemeit be sem lehet helyettesíteni (maradékosztályok és K-beli elemek között nem értelmeztünk műveletet). De ez a probléma eltűnik, ha K helyett K^*-ra gondolunk.

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, akkor legyen $f^*(x) = a_0^* + a_1^*x + \cdots + a_n^*x^n$. Az f^* polinomnak már maradékosztályok az együtthatói, és ezért ebbe már tudunk maradékosztályokat helyettesíteni. Helyettesítsük be az $\alpha = x + (f) \in L$ elemet:

$$f^*(\alpha) = (a_0+(f))+(a_1+(f))(x+(f))+\cdots+(a_n+(f))(x+(f))^n = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+(f)\,.$$

De ez épp $f + (f) = 0 + (f)$, ami pedig L nulleleme. Ezért f^*-nak α gyöke.

Ha most K-t és K^*-ot azonosítjuk, akkor persze f is „azonosul" f^*-gal, és **ezért** mondhatjuk azt, hogy L olyan bővítése K-nak, amiben már f-nek van gyöke. Ilyen azonosítások számtalan helyen előfordulnak, például az $1/2$ és $2/4$ törteket is azonosként kezeljük, és K elemeit is azonosítottuk $K[x]$ konstans polinomjaival.

1. *Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd soroljuk őket izomorfia-osztályokba. A $2\mathbb{Z}$ a páros számok gyűrűjét, a $2\mathbb{Z}_{16}$ pedig a $\mathbb{Z}_{16}$ gyűrű $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ részgyűrűjét jelöli.*

$$\mathbb{Z}_8/\{0,4\},\quad \mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\},\quad \mathbb{Z}_4/\{0\},\quad 2\mathbb{Z}/(8),\quad 2\mathbb{Z}_{16}/(8),\quad \mathbb{Z}_3,\quad 2\mathbb{Z}/(6)\,.$$

2. *Tekintsük azt az $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ izomorfizmust, amelyet úgy kapunk, hogy a homomorfizmus-tételt alkalmazzuk az $f \mapsto f(i)$ homomorfizmusra. Mi az $x+1$, x^2, $ax+b$ polinomok maradékosztályainak a képe?*

3. *Legyen $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$. Határozzuk meg L elemszámát, írjuk fel az összeadási és a szorzástábláját, keressük meg benne a $\mathbb{Z}_2^*$ résztestet, és (a fenti bevezető értelmében) adjuk meg L-ben az x^2+x+1 polinom gyökeit. Mi lesz L elemeinek minimálpolinomja $\mathbb{Z}_2^*$ felett?*

4. *Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \ncong \mathbb{C}$, *de* $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$.

b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

c) $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2) \cong \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$.

d) $\mathbb{Z}[x]$*-nek van olyan faktorgyűrűje, ami test.*

5. *A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ gyűrűben mi az $x+(x^2+x+1)$ inverze?*

6. *Oldjuk meg a fenti 3. feladatot abban az esetben, amikor x^2+x+1 helyett x^3+x+1 szerepel. Keressünk ezzel a módszerrel kilenc elemű testet is.*

7*. *Mutassuk meg, hogy ha K test, akkor $K^{n\times n}$ egyszerű gyűrű.*