Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első alkalom

1. *Az X halmazon megadott R relációról döntsük el, hogy ekvivalencia-reláció-e. Ha igen, adjuk meg a hozzá tartozó partíció osztályait.*

a) $X = \mathbb{Z}$, $a\ R\ b \iff 1999 \mid b - a$.

b) $X = \mathbb{R}$, $a\ R\ b \iff |b - a| \leq 1$.

c) $X = \mathbb{C}$, $a\ R\ b \iff |a| = |b|$.

d) X *a sík pontjai,* $P\ R\ Q$ *akkor és csak akkor, ha van olyan* A *egybevágósági transzformáció, mely fixálja az origót, és melyre* $A(P) = Q$.

e) X *tetszőleges halmaz,* f *egy* X*-en értelmezett függvény,* $a\ R\ b \iff f(a) = f(b)$.

2. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3 csoport összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel S_3-ban az $\{id, (12)\}$ részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt.*

3. *Az alábbi csoportoknak határozzuk meg a rendjét és az elemeiknek a rendjeit.*

a) Egy olyan téglalap szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.

b) Egy olyan deltoid szimmetriacsoportja, amely nem rombusz.

c) Egy olyan rombusz szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.

d) Egy négyzet szimmetriacsoportja.

4. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok egy G csoportban, akkor AB akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.*

5*. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok G-ben, akkor $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.*

6. *Legyen $n\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$ értékét.*

7. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha $|g|$ és $|h|$ relatív prímek, és $gh = hg$, akkor $|gh| = |g||h|$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

9*. *Igazoljuk, hogy $|G|$ pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.*

10*.** *Bizonyítsuk be, hogy minden 15 rendű csoport ciklikus.*

További gyakorló feladatok

11. *Legyen G csoport, H részcsoportja G-nek és $g \in G$. Mutassuk meg, hogy a $g^{-1}Hg$ komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint H rendje. Igaz-e, hogy a Hg jobboldali mellékosztály G egy alkalmas részcsoportja szerinti baloldali mellékosztály is egyben?*

12. *Igazoljuk, hogy minden nem egyelemű véges csoportban van prímrendű elem.*

13. *Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?*