Matematikus szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Nyilván $f = [(123)(42)]^{-1}(4365)(12)[(256)(123456)]^{-1} = (15)(46)$ (4 pont), rendje kettő (1 pont), előjele páros (1 pont).

2. $\mathbb{Z}_2$ felett $x^4+x^2+x = (x^3+x+1)x$, itt mindkét tényező irreducibilis, az első azért, mert harmadfokú, és 0, 1 egyike sem gyöke (1 pont). $\mathbb{Z}_3$ felett $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$, és ezek a tényezők is irreducibilisek, hiszen x^2+1 másodfokú, és 0, 1, 2 nem gyöke (2 pont). Ha lenne $\mathbb{Q}[x]$-ben nemtriviális felbontás, akkor lenne $\mathbb{Z}$ felett is felbontás alacsonyabb fokúakra a Gauss-Lemma miatt (1 pont). Mivel a főegyüttható 1, ugyanilyen fokúakra felbomlana a polinom $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ felett is (1 pont). De az alaptétel egyértelműségi állítása miatt ilyen felbontás nincs, hiszen $\mathbb{Z}_2$ felett csak első és harmadfokúra, $\mathbb{Z}_3$ felett csak két másodfokúra lehet bontani (1 pont).

3. Igen. Fejtsük ki a determinánst az első oszlopa szerint. Ha mindegyik aldetermináns nulla, akkor a determináns maga is nulla, és semmit sem kell változtatni. Ha van nem nulla aldetermináns, akkor a megfelelő elemre elsőfokú egyenletet kapunk.

4. Van, például $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, vagy bármelyik olyan mátrix, melynek nyoma -1 és determinánsa 1. A gyakorlaton bizonyított $M^2 - tr(M)M + \det(M)I = 0$ összefüggés szerint ilyenkor $M^2+M+I=0$, ahonnan $M-I$-vel beszorozva az állítás adódik.

5. Igen. Először is látjuk, hogy $g(y) = -6y^2+5$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}[y]$-ban (1 pont), és mivel primitív, irreducibilis $\mathbb{Z}[y]$-ban is (1 pont). Tekintsük most az eredeti $x^{12}-g$-t $\mathbb{Z}[y]$ feletti polinomnak. Erre ismét alkalmazható a Schönemann-Eisenstein, mert g irreducibilis, és így azt kapjuk, hogy ez a polinom irreducibilis $\mathbb{Z}[y]$ hányadosteste fölött (3 pont). Ez a polinom is primitív, hiszen normált, és ezért $\mathbb{Z}[y][x]$-ben is irreducibilis (1 pont). Megjegyezzük, hogy $\mathbb{Z}[y]$ hányadosteste $\mathbb{Q}(y)$-nal izomorf, de erre nincsen szükség a bizonyításban.

6. A Gauss-eliminációs eljárást alkalmazzuk. Először a mátrix sorait hozzáadjuk az első sorhoz, majd az első sort elosztjuk $n-1$-gyel, azután az első sort kivonjuk a többiből, majd a sorokat ismét hozzáadjuk az elsőhöz, végül az elsőtől különböző sorokat -1-gyel megszorozzuk. Ezeket ez egységmátrixszal elvégezve eredményül egy olyan mátrixot kapunk, melynek főátlójában mindenhol $(2-n)/(n-1)$, azon kívül pedig mindenütt $1/(n-1)$ van.

7. 1998-cal több páros van, mint páratlan. Tekintsük ugyanis az előző feladatban szereplő determinánst $n = 1999$-re. A determináns definíciója szerint ennek a determinánsnak az értéke pont a páros fixpontmentes permutációk száma mínusz a páratlan fixpontmentesek száma. Másrészt a determináns értéke 1998 az előző feladat gondolatmenete szerint.

8. Azokra az n-ekre van, amelyek oszthatók 2-vel vagy 3-mal. Fent 3-ra láttuk, hogy van megoldás, ugyanez a mátrix jó a 3 többbeseire is. Páros n-ekre is van megoldás, mert 2-re van. Megfordítva, tegyük fel, hogy n-re van. Legyen $f(x) = x^2 - tr(M)x + \det(M)$. Ekkor M gyöke f-nek is és x^n-1-nek is, tehát e két polinom g-vel jelölt legnagyobb közös osztójának is (hiszen g felírható $u(x)f(x)+v(x)(x^n-1)$ alakban). A g nem lehet elsőfokú, mert akkor $M = cI$ lenne, így $g = f \mid x^n-1$. Az x^n-1-nek az irreducibilisekre való felbontása $\mathbb{Q}$ felett $\prod_{d|n}\Phi_d$. De Φ_d csak $d = 1, 2$-re elsőfokú, és $d = 3, 4, 6$-ra másodfokú.